UNIVERSITÉ DE TOULON

UFR Sciences et Techniques

Initiation à la recherche – TD 7

W. Aschbacher (*http ://aschbacher.univ-tln.fr/*)

M74 M1 Cours du 1er semestre 2014 – 2015 (2e partie ; (6x2+1x1.5)h CM et TD)

Master Mathématiques

Exercice 31. Soit $\mathcal{V}$ un espace vectoriel complexe de dimension finie, $(\mathrm{sl}(2,\mathbb{C}),\mathcal{V},\pi)$ une RAL complexe irréductible de $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ et $u\in\mathcal{V}$ un vecteur propre de $\pi(H)\in\mathrm{gl}(\mathcal{V})$ associé à la valeur propre $\alpha\in\mathbb{C}$. Montrer :

$$\pi(H)\pi(X)u=(\alpha+2)\pi(X)u$$
$$\pi(H)\pi(Y)u=(\alpha-2)\pi(Y)u$$

Exercice 32. Soient $u\in\mathcal{V}$ comme dans Exr. 31, $N\in\mathbb{N}$ t.q. $\pi(X)^{N+1}u=0$ et $u_0=\pi(X)^N u\neq 0$ et $\lambda=\alpha+2N$ et $u_i=\pi(Y)^i u_0$ pour tout $i\in\mathbb{N}^*$. Montrer que, pour tout $i\in\mathbb{N}^*$,

$$\pi(X)u_i=i(\lambda-i+1)\,u_{i-1}.$$

Exercice 33. Soit $\mathcal{V}$ un espace vectoriel complexe muni d'une base $\{u_i\}_{i=0}^m$ et soit $\pi:\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})\to\mathrm{gl}(\mathcal{V})$ une application linéaire complexe définie par

$$\begin{aligned}
\pi(H)u_i&=(m-2i)u_i \text{ pour tout } i\in\{0,\dots,m\},\\
\pi(X)u_0&=0,\\
\pi(X)u_i&=i(m-i+1)u_{i-1} \text{ pour tout } i\in\{1,\dots,m\},\\
\pi(Y)u_i&=u_{i+1} \text{ pour tout } i\in\{0,\dots,m-1\},\\
\pi(Y)u_m&=0.
\end{aligned}$$

Montrer : $(\mathrm{sl}(2,\mathbb{C}),\mathcal{V},\pi)$ est une RAL complexe irréductible de $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ de dimension $m+1$.

Exercice 34. Montrer :

(a) Les matrices $\{F_1, F_2, F_3\} \subseteq \mathrm{Mat}(2, \mathbb{C})$, définies par $F_i := (-1)^{i+1} \frac{\mathrm{i}}{2} \sigma_i$ pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, constituent une base de $\mathrm{su}(2)$.

(b) Les constantes de structure de $\mathrm{su}(2)$ (p.r. à la base $\{F_1, F_2, F_3\}$) sont données par les symboles de Levi-Cività, c.-à-d., pour tout $i, j \in \{1, 2, 3\}$, on a

$$[F_i, F_j] = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} F_k.$$

(c) Soit $\{E_1, E_2, E_3\}$ la base de $\mathrm{so}(3)$ définie dans Ex. 4.14 *(a)*. Alors, l'application $\varphi : \mathrm{su}(2) \to \mathrm{so}(3)$, donnée par $\varphi(F_i) = E_i$ pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, est un IAL.

Exercice 35. Montrer qu'il existe un HGL $\Phi : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$ qui a les propriétés suivantes :

(a) Φ est le HGL associé de l'IAL $\varphi : \mathrm{su}(2) \to \mathrm{so}(3)$ de Exr. 34 (c).

(b) Φ est surjectif.

(c) $\ker(\Phi) = \{-1, 1\}$