UNIVERSITÉ DE TOULON
UFR Sciences et Techniques

Initiation à la recherche – TD 6

W. Aschbacher (*http ://aschbacher.univ-tln.fr/*)

M74 M1 Cours du 1er semestre 2014 – 2015 (2e partie ; (6x2+1x1.5)h CM et TD)

Master Mathématiques

Exercice 26. Soit G un GLM et $(G, \mathcal{V}, \Pi)$ une RGL complexe irréductible de G. Alors, pour tout $A \in \mathcal{Z}(G)$, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ t.q. $\Pi(A) = \lambda 1$.

Solution Soit $A \in \mathcal{Z}(G)$ fixé. Alors, pour tout $B \in G$ et tout $v \in \mathcal{V}$, on a

$$\Pi(A)\Pi(B)v = \Pi(AB)v = \Pi(BA)v = \Pi(B)\Pi(A)v,$$

et donc, $\Pi(A) : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ est un opérateur d'entrelacement. D'après le lemme de Schur (cf. Prop. 4.15 *(b)*), il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ t.q. $\Pi(A) = \lambda 1$. □

Exercice 27. Soit G un GLM abélien et $(G, \mathcal{V}, \Pi)$ une RGL complexe irréductible de G. Alors, $\dim(\mathcal{V}) = 1$.

Solution Comme G est abélien, on a $\mathcal{Z}(G) = G$ et donc, d'après Exr. 26, pour tout $A \in G$, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ t.q. $\Pi(A) = \lambda 1$. Alors, tout sous-espace W de $\mathcal{V}$ est invariant. Il en résulte que $\dim(\mathcal{V}) = 1$ parce que Π est irréductible. □

Exercice 28. Soit G un GLM et soient $(G, \mathcal{V}_i, \Pi_i)$ des RGL de G pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$. Alors, leur somme directe est une RGL.

Solution L'application $\Pi_1 \oplus \ldots \oplus \Pi_N$ est un homomorphisme de groupes parce que, pour tout $A, B \in G$ et tout $v_i \in V_i$, on a

$$\begin{aligned}\Pi_1 \oplus \ldots \oplus \Pi_N(AB)(v_1, \ldots, v_N) &= (\Pi_1(AB)v_1, \ldots, \Pi_N(AB)v_N)\\ &= (\Pi_1(A)\Pi_1(B)v_1, \ldots, \Pi_N(A)\Pi_N(B)v_N)\\ &= \Pi_1 \oplus \ldots \oplus \Pi_N(A)\, \Pi_1 \oplus \ldots \oplus \Pi_N(B)(v_1, \ldots, v_N).\end{aligned}$$

En outre, $\Pi_1 \oplus \ldots \oplus \Pi_N$ est continu parce que tous les Π_i le sont. □

Exercice 29. Pour $m \in \mathbb{N}$, soit $(\mathrm{su}(2), \mathcal{V}_m, \pi_m)$ la RAL associée à la RGL $(\mathrm{SU}(2), \mathcal{V}_m, \Pi_m)$ de Prop. 5.2, et soient $X, Y, H \in \mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ donnés par

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Alors, pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ et tout $i \in \{0, \dots, m\}$, on a

$$\begin{aligned} \pi_{m,\mathbb{C}}(X) z_1^{m-i} z_2^i &= -(m-i) z_1^{m-i-1} z_2^{i+1}, \\ \pi_{m,\mathbb{C}}(Y) z_1^{m-i} z_2^i &= -i z_1^{m-i+1} z_2^{i-1}, \\ \pi_{m,\mathbb{C}}(H) z_1^{m-i} z_2^i &= -(m-2i) z_1^{m-i} z_2^i. \end{aligned}$$

Solution D'après Prop. 5.3 *(a)* et *(b)*, on a

$$\begin{aligned} \pi_{m,\mathbb{C}}(X) &= -z_2 \frac{\partial}{\partial z_1}, \\ \pi_{m,\mathbb{C}}(Y) &= -z_1 \frac{\partial}{\partial z_2}, \\ \pi_{m,\mathbb{C}}(H) &= -z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}. \end{aligned}$$

En appliquant ces opérateurs sur $z_1^{m-i} z_2^i$, on obtient l'énoncé. □

Exercice 30. Soient $X, Y, H \in \mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ les matrices de Exr. 29. Montrer :

(a) $\{X, Y, H\}$ est une base de $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$.

(b) $[H, X] = 2X$, $[H, Y] = -2Y$ et $[X, Y] = H$

(c) Soit $\mathcal{V}$ un espace vectoriel complexe de dimension finie et $A, B, C \in \mathrm{gl}(\mathcal{V})$ t.q.

$$[A, B] = 2B, \quad [A, C] = -2C, \quad [B, C] = A.$$

Alors, l'application $\pi : \mathrm{sl}(2, \mathbb{C}) \to \mathrm{gl}(\mathcal{V})$, donnée par $\pi(H) = A$, $\pi(X) = B$ et par $\pi(Y) = C$ (et prolongée de manière linéaire complexe à la totalité de $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$), est une RAL complexe de $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$.

Solution

(a) Soit $A \in \mathrm{sl}(2, \mathbb{C}) = \{X \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{C}) \,|\, \mathrm{tr}(X) = 0\}$. Alors, on peut écrire $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{11} \end{bmatrix}$ avec $a_{11}, a_{12}, a_{21} \in \mathbb{C}$ et donc, on obtient

$$A = a_{11} H + a_{12} X + a_{21} Y.$$

En plus, les matrices H, X et Y sont linéairement indépendantes. Il en résulte que $\dim(\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})) = 3$.

(b) Calculer

(c) Pour tout $a, b, c \in \mathbb{C}$, on a $\pi(aH+bX+cY) = aA+bB+cC$. Alors, pour tout $E, F \in \mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ (avec les notations de (a)), on peut écrire

$$\begin{aligned}
[\pi(E), \pi(F)] &= [\pi(e_{11}H + e_{12}X + e_{21}Y), \pi(f_{11}H + f_{12}X + f_{21}Y)] \\
&= [e_{11}A + e_{12}B + e_{21}C, f_{11}A + f_{12}B + f_{21}C] \\
&= e_{11}f_{12}[A, B] + e_{11}f_{21}[A, C] + e_{12}f_{11}[B, A] + e_{12}f_{21}[B, C] \\
&+ e_{21}f_{11}[C, A] + e_{21}f_{12}[C, B] \\
&= 2e_{11}f_{12}B - 2e_{11}f_{21}C - 2e_{12}f_{11}B + e_{12}f_{21}A + 2e_{21}f_{11}C - e_{21}f_{12}A \\
&= \pi(2e_{11}f_{12}X - 2e_{11}f_{21}Y - 2e_{12}f_{11}X + e_{12}f_{21}H + 2e_{21}f_{11}Y - e_{21}f_{12}H) \\
&= \pi([e_{11}H + e_{12}X + e_{21}Y, f_{11}H + f_{12}X + f_{21}Y]) \\
&= \pi([E, F]).
\end{aligned}$$

□