UNIVERSITÉ DE TOULON

UFR Sciences et Techniques

Initiation à la recherche – TD 5

W. Aschbacher (*http ://aschbacher.univ-tln.fr/*)

M74 M1 Cours du 1er semestre 2014 – 2015 (2e partie ; (6x2+1x1.5)h CM et TD)

Master Mathématiques

Exercice 21. Montrer : $\mathrm{su}(d)_{\mathbb{C}} \cong \mathrm{sl}(d, \mathbb{C})$

Exercice 22. Soient $X, Y \in \mathrm{Mat}(d, \mathbb{C})$ t.q. $\|X\|, \|Y\| \leq \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$ suffisamment petit. Montrer :

$$\log(\mathrm{e}^X \mathrm{e}^Y) = X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \frac{1}{12}[X, [X, Y]] - \frac{1}{12}[Y, [X, Y]] + \mathcal{O}(\varepsilon^4).$$

Exercice 23. Soient G et H des GLM simplement connexes. Montrer :

$$\mathrm{Lie}(G) \cong \mathrm{Lie}(H) \quad \Longrightarrow \quad G \cong H$$

Exercice 24. Soit G un GLM connexe. Pour $i \in \{1, 2\}$, soit $(G, \mathcal{V}_i, \Pi_i)$ une RGL de G et $(\mathrm{Lie}(G), \mathcal{V}_i, \pi_i)$ la RAL associée. Montrer :

$$\pi_1 \sim \pi_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \Pi_1 \sim \Pi_2$$

Exercice 25. Montrer :

(a) Les matrices $\{E_i\}_{i=1}^3$ dans $\mathrm{Mat}(3, \mathbb{C})$, données par

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

forment une base de $\mathrm{so}(3)$ p.r. à laquelle les constantes de structure sont données par les symboles de Levi-Cività, c.-à-d., pour tout $i, j \in \{1, 2, 3\}$, on a

$$[E_i, E_j] = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} E_k.$$

En plus, nous avons que $E_i e_j = \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} e_k$ pour tout $i, j \in \{1, 2, 3\}$, où $\{e_i\}_{i=1}^3$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(b) La représentation standard et la représentation adjointe de $\mathrm{so}(3)$ sont équivalentes.

(c) La représentation standard et la représentation adjointe de $\mathrm{SO}(3)$ sont équivalentes.