

## Initiation à la recherche – TD 3

W. Aschbacher (<http://aschbacher.univ-tln.fr/>)

M74 M1 Cours du 1er semestre 2014 – 2015 (2e partie ; (6x2+1x1.5)h CM et TD)

Master Mathématiques

**Exercice 11.** Soient  $X, Y \in \text{Mat}(d, \mathbb{C})$ . Alors :

- (a)  $e^0 = 1$
- (b)  $(e^X)^* = e^{X^*}$
- (c)  $e^X \in \text{GL}(d, \mathbb{C})$  et  $(e^X)^{-1} = e^{-X}$
- (d)  $e^{(\lambda+\mu)X} = e^{\lambda X} e^{\mu X}$  pour tout  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$
- (e)  $e^{X+Y} = e^X e^Y$  si  $[X, Y] = 0$
- (f)  $e^{CXC^{-1}} = C e^X C^{-1}$  pour tout  $C \in \text{GL}(d, \mathbb{C})$
- (g)  $\|e^X\| \leq e^{\|X\|}$
- (h)  $\frac{d}{dt} e^{tX} = X e^{tX} = e^{tX} X$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$
- (i)  $\det(e^X) = e^{\text{tr}(X)}$

**Exercice 12.** Soit  $X \in \text{Mat}(d, \mathbb{C})$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$  une valeur propre de  $X$ . Alors,  $|\lambda| \leq \|X\|$ .

**Exercice 13.** Soit  $X \in \text{Mat}(d, \mathbb{C})$ . Alors, il existe une suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de matrices diagonalisables dans  $\text{Mat}(d, \mathbb{C})$  t.q.  $X_n \rightarrow X$ .

**Exercice 14.** Soit  $A$  un sous-groupe à un paramètre de  $\text{GL}(d, \mathbb{C})$ . Alors,  $\text{ran}(A)$  est un sous-groupe abélien de  $\text{GL}(d, \mathbb{C})$ .

**Exercice 15.** Soit  $G$  un GLM et  $X \in \text{Lie}(G)$ . Alors :

- (a)  $e^X \in G_e$
- (b)  $AXA^{-1} \in \text{Lie}(G)$  pour tout  $A \in G$