UFR Sciences et Techniques

Initiation à la recherche – TD 2

W. Aschbacher (*http ://aschbacher.univ-tln.fr/*)

M74 M1 Cours du 1er semestre 2014 – 2015 (2e partie ; (6x2+1x1.5)h CM et TD)

Master Mathématiques

Exercice 6. La relation $A \sim B :\Leftrightarrow$ "A est relié à B." est une relation d'équivalence.

Solution Pour démontrer que la relation $A \sim B$ est une relation d'équivalence, nous devons vérifier que cette relation est réflexive, symétrique et transitive (cf. Rap. 1.45).

Réflexivité :
Soit $A \in G$. A est relié à A par le chemin $\Gamma(t) := A$ pour tout $t \in [0,1]$.

Symétrie :
Soient $A, B \in G$. Si A est relié à B par le chemin Γ, alors B est relié à A par le chemin $t \mapsto \Gamma(1-t)$ pour tout $t \in [0,1]$.

Transitivité :
Soient $A, B, C \in G$. Si A est relié à B par le chemin Γ_1 et si B est relié à C par le chemin Γ_2, alors A est relié à C par le chemin $\Gamma \in C([0,1], G)$ défini par

$$\Gamma(t) := \begin{cases} \Gamma_1(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \Gamma_2(2t-1), & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

$\square$

Exercice 7. Soit G un GLM. Alors, G_e est un sous-groupe de G.

Solution La composante connexe de l'identité de G est donnée par

$$G_e = \{A \in G \,|\, \text{il existe } \Gamma \in C([0,1], G) \text{ t.q. } \Gamma(0) = A \text{ et } \Gamma(1) = 1\}.$$

Alors, on a $G_e \subseteq G$. En plus, nous vérifions les conditions suivantes qui caractérisent un sous-groupe de G (cf. Déf. 1.4) :

(SG1) Si A est relié à 1 par le chemin Γ_1 et B est relié à 1 par le chemin Γ_2, alors AB est relié à 1 par le chemin $t \mapsto \Gamma_1(t)\Gamma_2(t)$ pour tout $t \in [0,1]$ (la multiplication matricielle $(A, B) \mapsto AB$ est une opération continue).

(SG2) Si A est relié à 1 par le chemin Γ, alors A^{-1} est relié à 1 par le chemin $t \mapsto \Gamma(t)^{-1}$ pour tout $t \in [0,1]$ (l'inversion matricielle $A \mapsto A^{-1}$ est une opération continue). $\square$

Exercice 8. $\mathrm{U}(d)$ et $\mathrm{SU}(d)$ sont connexes pour tout $d \in \mathbb{N}^*$.

Solution

Pour $\mathrm{U}(d)$:

Soit $A \in \mathrm{U}(d)$. Alors, d'après Rap. 1.47, il existe $U \in \mathrm{U}(d)$ et $\theta_1, \ldots, \theta_d \in \mathbb{R}$ t.q. $A = U\mathrm{diag}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}, \ldots, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_d}]U^*$, et nous définissons $\Gamma : [0,1] \to \mathrm{Mat}(d, \mathbb{C})$, pour tout $t \in [0,1]$, par

$$\Gamma(t) := U\mathrm{diag}\big[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(1-t)\theta_1}, \ldots, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(1-t)\theta_d}\big]U^*.$$

Il en résulte que $\Gamma(0) = A$, $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(t)\Gamma(t)^* = \Gamma(t)^*\Gamma(t) = 1$ et $\Gamma \in C([0,1], \mathrm{U}(d))$.

Pour $\mathrm{SU}(d)$:

Soit $A \in \mathrm{SU}(d)$. Alors, d'après Rap. 1.47, il existe $U \in \mathrm{U}(d)$ et $\theta_1, \ldots, \theta_d \in \mathbb{R}$ t.q. $A = U\mathrm{diag}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}, \ldots, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_d}]U^*$, et nous définissons $\tilde{\Gamma} : [0,1] \to \mathrm{Mat}(d, \mathbb{C})$, pour tout $t \in [0,1]$, par

$$\tilde{\Gamma}(t) := U\mathrm{diag}\big[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(1-t)\theta_1}, \ldots, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(1-t)\theta_{d-1}}, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(1-t)\sum_{i=1}^{d-1}\theta_i}\big]U^*.$$

Il en résulte que $\tilde{\Gamma}(0) = A$, $\tilde{\Gamma}(1) = 1$, $\tilde{\Gamma}(t)\tilde{\Gamma}(t)^* = \tilde{\Gamma}(t)^*\tilde{\Gamma}(t) = 1$, $\det(\tilde{\Gamma}(t)) = 1$ et $\tilde{\Gamma} \in C([0,1], \mathrm{SU}(d))$. $\square$

Exercice 9.

(a) $\det : \mathrm{GL}(d, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}^*$ est un HGL.

(b) $R : \mathbb{R} \to \mathrm{SO}(2)$, défini par $R(\theta) := \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, est un HGL.

Solution

(a) Nous notons d'abord que $\mathbb{C}^* = \mathrm{GL}(1, \mathbb{C})$. En plus, par définition, $\det(A) \neq 0$ pour tout $A \in \mathrm{GL}(d, \mathbb{C})$ et donc, l'application $\det$ envoie bel et bien le GLM $\mathrm{GL}(d, \mathbb{C})$ dans le GLM $\mathrm{GL}(1, \mathbb{C})$. Ensuite, nous allons vérifier les propriétés d'un HGL (cf. Déf. 1.38) :

(HGL1) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ pour tout $A, B \in \mathrm{GL}(d, \mathbb{C})$

(HGL2) $\det$ est continue.

(b) Nous notons d'abord que $\mathbb{R}_+^* = \mathrm{GL}^+(1, \mathbb{R})$ (cf. Prop. 1.28) et que l'application $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, définie par $\gamma(x) := \mathrm{e}^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, est un isomorphisme de groupes continu (la multiplication dans le groupe $\mathbb{R}$ étant l'addition de nombres réels). Ensuite, nous allons vérifier les propriétés d'un HGL (cf. Déf. 1.38) :

(HGL1) En utilisant des identités trigonométriques, on peut calculer que, pour tout $\theta, \phi \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
R(\theta)R(\phi) &= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi & -(\sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi) \\ \sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi & \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos(\theta+\phi) & -\sin(\theta+\phi) \\ \sin(\theta+\phi) & \cos(\theta+\phi) \end{bmatrix} = R(\theta+\phi).
\end{aligned}$$

(HGL2) R est continu.

$\square$

Exercice 10. Soit Φ le HGL de Prop. 1.40. Montrer :

(a) $\mathrm{ran}\,(\Phi) \subseteq \mathrm{SO}(3)$

(b) Φ n'est pas injectif.

Solution

(a) D'après Dém. 1.40, nous savons déjà que $\mathrm{ran}\,(\Phi) \subseteq \mathrm{O}(3)$. En plus, nous savons que $\det(\Phi(U)) = \pm 1$ pour tout $U \in \mathrm{SU}(2)$ parce que, pour tout $A \in \mathrm{O}(d)$, on a

$$1 = \det(AA^T) = \det(A)\det(A^T) = \det(A)^2,$$

d'où donc $\det(A) = \pm 1$.
Supposons maintenant qu'il existe $U \in \mathrm{SU}(2)$ t.q. $\det(\Phi(U)) = -1$. Comme $\mathrm{SU}(2)$ est connexe (cf. Prop. 1.27 *(b)*), il existe un chemin $\Gamma \in C([0,1], \mathrm{SU}(2))$ t.q. $\Gamma(0) = U$ et $\Gamma(1) = 1$. Alors, d'une part, la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, définie, pour tout $t \in [0,1]$, par

$$f(t) := \det(\Phi(\Gamma(t))),$$

est continue et $\mathrm{ran}\,(f) := \{f(t) \,|\, t \in [0,1]\} = \{\pm 1\}$. D'autre part, on a $f(0) = -1$ et $f(1) = 1$ ce qui en contradiction avec la continuité de f.

(b) Φ n'est pas injectif parce que $\Phi(-U) = \Phi(U)$.

$\square$