UNIVERSITÉ DE TOULON

UFR Sciences et Techniques

Initiation à la recherche – TD 1

W. Aschbacher (*http ://aschbacher.univ-tln.fr/*)

M74 M1 Cours du 1er semestre 2014 – 2015 (2e partie ; (6x2+1x1.5)h CM et TD)

Master Mathématiques

Exercice 1. $\mathrm{O}(d)$ et $\mathrm{SO}(d)$ sont des GLM.

Solution
Pour $\mathrm{O}(d)$:
(GL1) $\mathrm{O}(d)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(d,\mathbb{C})$:

(SG1) Pour tout $A, B \in \mathrm{O}(d)$, on a $AB \in \mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$ et

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = B^T A^T = (AB)^T.$$

(SG2) Pour tout $A \in \mathrm{O}(d)$, on a $A^{-1} \in \mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$ et

$$(A^{-1})^{-1} = A = (A^T)^T = (A^{-1})^T.$$

(GL2) Si $\mathrm{O}(d) \ni A_n \to A \in \mathrm{Mat}(d,\mathbb{C})$, on a $A_n^T \to A^T$ et $1_d = A_n A_n^T \to AA^T$ (parce que la transposition et le produit matriciel sont continus), d'où $A \in \mathrm{O}(d)$.

Pour $\mathrm{SO}(d)$:
(GL1) $\mathrm{SO}(d)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(d,\mathbb{C})$ parce que $\mathrm{SO}(d) = \mathrm{SL}(d,\mathbb{R}) \cap \mathrm{O}(d)$ et parce que $\mathrm{SL}(d,\mathbb{R})$ et $\mathrm{O}(d)$ sont des sous-groupes de $\mathrm{GL}(d,\mathbb{C})$.

(GL2) Si $\mathrm{SO}(d) \ni A_n \to A \in \mathrm{Mat}(d,\mathbb{C})$, on a $A \in \mathrm{SO}(d)$ d'après *(GL2)* pour $\mathrm{O}(d)$ et *(GL2)* pour $\mathrm{SL}(d,\mathbb{R})$. $\square$

Exercice 2. Soit $A \in \mathrm{SU}(2)$. Alors, il existe $a, b \in \mathbb{C}$ avec $|a|^2 + |b|^2 = 1$ t.q.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix}.$$

Solution Soient $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ et $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{SU}(2)$. Alors, comme $A^* = A^{-1}$ et

$$A^* = \bar{A}^T = \begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{\underbrace{\det(A)}_{=1}} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix},$$

on obtient $d = \bar{a}$ et $c = -\bar{b}$. En plus, on a $1 = \det(A) = |a|^2 + |b|^2$. $\square$

Exercice 3.

(a) $\mathrm{Sp}(1, \mathbb{R}) = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$

(b) $\mathrm{Sp}(1, \mathbb{C}) = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$

(c) $\mathrm{Sp}(1) = \mathrm{SU}(2)$

Solution

(a) Nous rappelons que $\mathrm{Sp}(1, \mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R}) \mid A^T J A = J\}$ et que $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$. Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{R})$, on peut écrire

$$A^T J A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & ad - bc \\ -(ad - bc) & 0 \end{bmatrix} = \det(A) J.$$

Il en résulte que $A^T J A = J$ ssi $\det(A) = ad - bc = 1$.

(b) Comme (a).

(c) Comme $\mathrm{SU}(2) = \{A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}) \mid \det(A) = 1 \text{ et } A^{-1} = A^*\}$ et

$$\mathrm{Sp}(1) = \mathrm{Sp}(1, \mathbb{C}) \cap \mathrm{U}(2) = \{A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}) \mid A^T J A = J \text{ et } A^{-1} = A^*\},$$

on obient l'énoncé en utilisant (b).

$\square$

Exercice 4. Soient $x = (x_1, \dots, x_d), y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$ et $(x, y) := \sum_{i=1}^d x_i y_i$ le produit scalaire **euclidien** sur $\mathbb{R}^d$. Alors, $A \in \mathrm{O}(d)$ ssi $(Ax, Ay) = (x, y)$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}^d$.

<u>Solution</u> Soit $A \in \mathrm{O}(d) = \{A \in \mathrm{GL}(d, \mathbb{R}) \,|\, A^{-1} = A^T\}$. Alors, pour tout $x, y \in \mathbb{R}^d$, on a

$$(Ax, Ay) = (x, A^T A y) = (x, y).$$

Inversement, si $(x, A^T A y) = (x, y)$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}^d$, on a $(x, [A^T A - 1]y) = 0$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}^d$ d'où, pour $x = (A^T A - 1)y$, on trouve $(A^T A - 1)y = 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}^d$ (cf. Rap. 1.44) et donc, $A^T A - 1 = 0$. □

Exercice 5. Les GLM $\mathrm{O}(d, \mathbb{C})$, $\mathrm{SO}(d, \mathbb{C})$, $\mathrm{O}(p, q)$, $\mathrm{SO}(p, q)$, $\mathrm{Sp}(d, \mathbb{R})$ et $\mathrm{Sp}(d, \mathbb{C})$ ne sont pas compacts (en général).

<u>Solution</u> Nous allons vérifier les propriétés de Déf. 1.19 (en utilisant Rap. 1.49) :

Pour $\mathrm{O}(d, \mathbb{C})$ et $\mathrm{SO}(d, \mathbb{C})$:
Si $d = 1$, on a $\mathrm{O}(d, \mathbb{C}) = \{\pm 1\}$ et $\mathrm{SO}(d, \mathbb{C}) = \{1\}$. Alors, $\mathrm{O}(1, \mathbb{C})$ et $\mathrm{SO}(1, \mathbb{C})$ sont compacts.
Si $d \geq 2$, $\mathrm{O}(d, \mathbb{C})$ et $\mathrm{SO}(d, \mathbb{C})$ ne sont pas bornés.

Exemple : $A_n = \begin{bmatrix} \cosh n & \mathrm{i} \sinh n & \\ -\mathrm{i} \sinh n & \cosh n & \\ & & 1_{d-2} \end{bmatrix} \in \mathrm{SO}(d, \mathbb{C})$

Pour $\mathrm{O}(p, q)$ et $\mathrm{SO}(p, q)$:
Ces groupes ne sont pas bornés.

Exemple : $A_n = \begin{bmatrix} \cosh n & & \sinh n \\ & 1_{p+q-2} & \\ \sinh n & & \cosh n \end{bmatrix} \in \mathrm{SO}(p, q)$

Pour $\mathrm{Sp}(d, \mathbb{R})$ et $\mathrm{Sp}(d, \mathbb{C})$:
Ces groupes ne sont pas bornés.

Exemple : $A_n = \begin{bmatrix} \cosh(n) 1_d & \sinh(n) 1_d \\ \sinh(n) 1_d & \cosh(n) 1_d \end{bmatrix} \in \mathrm{Sp}(d, \mathbb{R})$ □