UNIVERSITÉ DE TOULON

UFR Sciences et Techniques

Initiation à la recherche

16/12/2014

W. Aschbacher (*http ://aschbacher.univ-tln.fr/*)

M74 M1 Cours du 1er semestre 2014 – 2015 (2e partie ; (6x2+1x1.5)h CM et TD)

Master Mathématiques

Table des matières

1 Groupes de Lie matriciels

1.1 Définitions

Nous commençons par introduire la notion fondamentale de ce cours.

Définition 1.1 *Un* **groupe** *est un ensemble G muni d'une* **multiplication** $G \times G \to G$*, notée* $(g, h) \mapsto gh$*, ayant les propriétés suivantes :*

(G1) $g(hk) = (gh)k$ *pour tout* $g, h, k \in G$

(G2) Il existe $e \in G$ *t.q.* $ge = eg = g$ *pour tout* $g \in G$.

(G3) Pour tout $g \in G$*, il existe* $h \in G$ *t.q.* $gh = hg = e$.

*La propriété (G1) s'appelle l'***associativité***. Les éléments e de (G2) et h de (G3) s'appellent respectivement l'***identité** *de G et l'***inverse** *de g, et h sera noté g^{-1}.*
Un groupe G s'appelle **abélien** *(ou* **commutatif***) si $gh = hg$ pour tout $g, h \in G$.*

Remarque 1.2 *Dans les applications, il faut tout d'abord vérifier que la multiplication est* **interne***, c.-à-d., que la multiplication envoie bel et bien $G \times G$ dans G. Dans certains cas, cette vérification peut s'avérer non triviale.*

Dans ce cours, nous supposerons toujours que $d \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, \ldots\}$, et $\mathbb{K}$ désignera le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (cf. Rap. 1.42 pour la définition d'un corps).

Définition 1.3 *Soit $\mathrm{Mat}(d, \mathbb{K})$ l'ensemble des matrices $d \times d$ à entrées dans $\mathbb{K}$. Le* **groupe linéaire général** *et le* **groupe linéaire spécial** *sont définis comme les ensembles*

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{GL}(d, \mathbb{K}) &:= \{A \in \mathrm{Mat}(d, \mathbb{K}) \mid A \textit{ est inversible}\}, \\ \mathrm{SL}(d, \mathbb{K}) &:= \{A \in \mathrm{GL}(d, \mathbb{K}) \mid \det(A) = 1\}, \end{aligned}}$$

munis de la multiplication donnée par le produit matriciel.

En plus, pour pouvoir définir notre objet principal, nous avons besoin des deux définitions suivantes.

Définition 1.4 *Un* **sous-groupe** *d'un groupe G est un sous-ensemble (non vide) H de G ayant les propriétés suivantes (pour tout $g, h \in H$) :*

(SG1) $gh \in H$

(SG2) $g^{-1} \in H$

Définition 1.5 *Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $\mathrm{Mat}(d, \mathbb{C})$ et soit $A \in \mathrm{Mat}(d, \mathbb{C})$. On dit que A_n* **converge vers** *A, noté $\boxed{A_n \to A}$, si les entrées de A_n convergent vers les entrées de A, c.-à-d., si, pour tout $i, j \in \{1, \ldots, d\}$, on a*

$$\lim_{n \to \infty} [A_n]_{ij} = A_{ij}.$$

L'objet principal de ce cours est le suivant.

Définition 1.6 *Un* **groupe de Lie matriciel (GLM)** *(dans* $\mathrm{GL}(d, \mathbb{C})$*) est un ensemble* G *ayant les propriétés suivantes :*

(GL1) G *est un sous-groupe de* $\mathrm{GL}(d, \mathbb{C})$ *pour un* $d \in \mathbb{N}^*$*.*

(GL2) Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dans* G *qui converge vers* $A \in \mathrm{Mat}(d, \mathbb{C})$*, on a*

$$A \in G \quad \textit{ou} \quad A \notin \mathrm{GL}(d, \mathbb{C}),$$

c.-à-d., G *est un sous-groupe fermé de* $\mathrm{GL}(d, \mathbb{C})$ *(mais pas de* $\mathrm{Mat}(d, \mathbb{C})$ *en général).*

Remarque 1.7 *La condition de fermeture est de nature technique dans le sens où la plupart des sous-groupes intéressants de* $\mathrm{GL}(d, \mathbb{C})$ *sont des sous-groupes fermés de* $\mathrm{Mat}(d, \mathbb{C})$ *(cf. Rem. 1.20 (b) ci-dessous).*

Proposition 1.8 $\mathrm{GL}(d, \mathbb{K})$ *et* $\mathrm{SL}(d, \mathbb{K})$ *sont des GLM.*

Démonstration 1.8

(a) $\mathrm{GL}(d, \mathbb{K})$ est un groupe p.r. à la multiplication donnée par le produit matriciel parce que, d'abord, cette multiplication est interne car $\det(AB) = \det(A)\det(B) \neq 0$ pour tout $A, B \in \mathrm{GL}(d, \mathbb{K})$ (c.-à-d., AB est inversible si A et B le sont). En outre, les conditions de Déf. 1.1 sont satisfaites :

(G1) Le produit matriciel est associatif.

(G2) L'identité est donnée par $1_d := \mathrm{diag}[1, \ldots, 1] \in \mathrm{GL}(d, \mathbb{K})$, où $A = \mathrm{diag}[\lambda_1, \ldots, \lambda_d] \in \mathrm{Mat}(d, \mathbb{K})$ désigne la matrice diagonale $d \times d$ ayant les entrées $A_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$, et δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

(G3) L'inverse au sens des groupes est l'inverse au sens des matrices.

Ensuite, nous vérifions les conditions de Déf. 1.6 :

(GL1) $\mathrm{GL}(d, \mathbb{K})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(d, \mathbb{C})$.

(GL2) Si $\mathrm{GL}(d, \mathbb{K}) \ni A_n \to A \in \mathrm{Mat}(d, \mathbb{C})$, alors, soit $A \in \mathrm{GL}(d, \mathbb{K})$, soit $A \notin \mathrm{GL}(d, \mathbb{C})$.

(b) $\mathrm{SL}(d, \mathbb{K})$ est un groupe p.r. au produit matriciel parce que $\det(AB) = \det(A)\det(B) = 1$ pour tout $A, B \in \mathrm{SL}(d, \mathbb{K})$, et parce que les conditions de Déf. 1.1 sont satisfaites comme dans *(a)*.

En ce qui concerne les conditions de Déf. 1.6, on a :

(GL1) $\mathrm{SL}(d, \mathbb{K})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(d, \mathbb{C})$:

(SG1) $\det(AB) = 1$ pour tout $A, B \in \mathrm{SL}(d, \mathbb{K})$

(SG2) $\det(A^{-1}) = 1/\det(A) = 1$ pour tout $A \in \mathrm{SL}(d, \mathbb{K})$

(GL2) Si $\mathrm{SL}(d, \mathbb{K}) \ni A_n \to A \in \mathrm{Mat}(d, \mathbb{C})$, on a $\det(A) = 1$ parce que $\det(A_n)$ est un polynôme dans les entrées $[A_n]_{ij}$ de A_n, c.-à-d., $\det(A_n)$ est une fonction <u>continue</u> de $[A_n]_{ij}$. Alors, $A \in \mathrm{SL}(d, \mathbb{K})$.

$\square$

1.2 Groupes classiques

Dans cette section, nous allons introduire d'autres groupes dits classiques. Pour ce faire, nous utilisons les notations suivantes :
A^T est la matrice transposée, $\bar{A}$ la matrice complexe conjuguée et $A^* := \bar{A}^T$ la matrice adjointe de la matrice $A \in \mathrm{Mat}(d, \mathbb{C})$.

Définition 1.9

(a) Le **groupe orthogonal** *et le* **groupe orthogonal spécial** *sont définis par*

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{O}(d) &:= \{A \in \mathrm{GL}(d, \mathbb{R}) \mid A^{-1} = A^T\}, \\ \mathrm{SO}(d) &:= \{A \in \mathrm{O}(d) \mid \det(A) = 1\}. \end{aligned}}$$

(b) Le **groupe unitaire** *et le* **groupe unitaire spécial** *sont définis par*

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{U}(d) &:= \{A \in \mathrm{GL}(d, \mathbb{C}) \mid A^{-1} = A^*\}, \\ \mathrm{SU}(d) &:= \{A \in \mathrm{U}(d) \mid \det(A) = 1\}. \end{aligned}}$$

Proposition 1.10 *Les groupes* $\mathrm{O}(d)$*,* $\mathrm{SO}(d)$*,* $\mathrm{U}(d)$ *et* $\mathrm{SU}(d)$ *sont des GLM.*

Démonstration 1.10 Cf. Exr. 1 □

Les GLM $\mathrm{O}(2)$ et $\mathrm{SU}(2)$ possèdent les paramétrages suivants qui sont très utiles dans la pratique.

Proposition 1.11

(a) Soit $A \in \mathrm{O}(2)$*. Alors, il existe* $\theta \in \mathbb{R}$ *t.q.*

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad \textit{ou} \quad \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}.$$

(b) Soit $A \in \mathrm{SU}(2)$*. Alors, il existe* $a, b \in \mathbb{C}$ *avec* $|a|^2 + |b|^2 = 1$ *t.q.*

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix}.$$

Démonstration 1.11

(a) Soient $v, w \in \mathbb{R}^2$ donnés par $v := [a, c]^T$ et $w := [b, d]^T$, et soit $A := [v, w] \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{R})$. Alors, $A \in \mathrm{O}(2)$ ssi $A^T A = 1$, c.-à-d., ssi $v^T v = w^T w = 1$ et $v^T w = w^T v = 0$. En posant $a := \cos\theta$ et $c := \sin\theta$ pour un $\theta \in \mathbb{R}$ (ce qui est possible d'après $v^T v = a^2 + c^2 = 1$), on peut écrire (comme $v^T w = 0$, c.-à-d., comme w est orthogonal à v) que

$$v := \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}\Bigg|_{\varphi = \pm\frac{\pi}{2}} v = \begin{bmatrix} \mp\sin\theta \\ \pm\cos\theta \end{bmatrix},$$

où la matrice qui agit sur v est une rotation dans le plan $\mathbb{R}^2$ de centre $(0,0)$ et d'angle $\varphi = \pm\pi/2$ dans le sens positif (c.-à-d., en sens inverse des aiguilles d'une montre).

(b) Cf. Exr. 2

$\square$

Les groupes suivants font également partie des groupes classiques.

Définition 1.12

(a) Le **groupe orthogonal complexe** *et le* **groupe orthogonal complexe spécial** *sont définis par*

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{O}(d,\mathbb{C}) &:= \{A \in \mathrm{GL}(d,\mathbb{C}) \,|\, A^{-1} = A^T\}, \\ \mathrm{SO}(d,\mathbb{C}) &:= \{A \in \mathrm{O}(d,\mathbb{C}) \,|\, \det(A) = 1\}. \end{aligned}}$$

(b) Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$*. Le* **groupe orthogonal généralisé** *et le* **groupe orthogonal généralisé spécial** *sont définis par*

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{O}(p,q) &:= \{A \in \mathrm{GL}(p+q,\mathbb{R}) \,|\, A^T g A = g\}, \\ \mathrm{SO}(p,q) &:= \{A \in \mathrm{O}(p,q) \,|\, \det(A) = 1\}, \end{aligned}}$$

où la matrice $g \in \mathrm{GL}(p+q,\mathbb{R})$ *est donnée par*

$$g := \begin{bmatrix} 1_p & 0 \\ 0 & -1_q \end{bmatrix}.$$

Pour $p = 3$ *et* $q = 1$*, le groupe orthogonal généralisé s'appelle le* **groupe de Lorentz***.*

Remarque 1.13 *Pour tout* $A \in \mathrm{O}(p,q)$*, on obtient* $\det(A^T g A) = \det(g)\det(A)^2 = \det(g)$*, et comme* $\det(g) = (-1)^q \neq 0$*, il en résulte* $\det(A) = \pm 1$*.*

On peut facilement montrer que $\mathrm{O}(1,1)$ possède les paramétrages suivants, également très utiles dans la pratique, dont le premier s'appelle un **boost** ou une **rotation hyperbolique**.

Proposition 1.14 *Soit* $A \in \mathrm{O}(1,1)$*. Alors, il existe* $t \in \mathbb{R}$ *t.q.*

$$A = \begin{bmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} -\cosh t & \sinh t \\ \sinh t & -\cosh t \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} \cosh t & -\sinh t \\ \sinh t & -\cosh t \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} -\cosh t & -\sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{bmatrix}.$$

Finalement, nous allons introduire les groupes suivants.

Définition 1.15 *Le* **groupe symplectique réel***, le* **groupe symplectique complexe** *et le* **groupe symplectique compact** *sont définis par*

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{Sp}(d,\mathbb{R}) &:= \{A \in \mathrm{GL}(2d,\mathbb{R}) \mid A^T J A = J\}, \\ \mathrm{Sp}(d,\mathbb{C}) &:= \{A \in \mathrm{GL}(2d,\mathbb{C}) \mid A^T J A = J\}, \\ \mathrm{Sp}(d) &:= \mathrm{Sp}(d,\mathbb{C}) \cap \mathrm{U}(2d), \end{aligned}}$$

où la matrice $J \in \mathrm{GL}(2d,\mathbb{R})$ *est donnée par*

$$J := \begin{bmatrix} 0 & 1_d \\ -1_d & 0 \end{bmatrix}.$$

On peut montrer que tous ces groupes sont des GLM.

Proposition 1.16 *Les groupes* $\mathrm{O}(d,\mathbb{C})$*,* $\mathrm{SO}(d,\mathbb{C})$*,* $\mathrm{O}(p,q)$*,* $\mathrm{SO}(p,q)$*,* $\mathrm{Sp}(d,\mathbb{R})$*,* $\mathrm{Sp}(d,\mathbb{C})$ *et* $\mathrm{Sp}(d)$ *sont des GLM.*

Définition 1.17 *Les 15 GLM que nous venons d'introduire, c.-à-d.,*

$$\begin{aligned} &\mathrm{GL}(d,\mathbb{R}),\ \mathrm{GL}(d,\mathbb{C}),\ \mathrm{SL}(d,\mathbb{R}),\ \mathrm{SL}(d,\mathbb{C}), \\ &\mathrm{O}(d),\ \mathrm{SO}(d), \\ &\mathrm{U}(d),\ \mathrm{SU}(d), \\ &\mathrm{O}(d,\mathbb{C}),\ \mathrm{SO}(d,\mathbb{C}), \\ &\mathrm{O}(p,q),\ \mathrm{SO}(p,q), \\ &\mathrm{Sp}(d,\mathbb{R}),\ \mathrm{Sp}(d,\mathbb{C}),\ \mathrm{Sp}(d), \end{aligned}$$

s'appellent les **groupes classiques***.*

Remarque 1.18 *Si* G *est un GLM parmi*

$$\mathrm{O}(d),\ \mathrm{U}(d),\ \mathrm{O}(d,\mathbb{C}),\ \mathrm{O}(p,q),\ \mathrm{Sp}(d,\mathbb{R}),\ \mathrm{Sp}(d,\mathbb{C}),$$

il se caractérise aussi par l'invariance d'une certaine forme bilinéaire ou sesquilinéaire $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{K}$ *sur un espace vectoriel* $\mathcal{V}$ *sur* $\mathbb{K}$ *(en général, cette forme n'est pas un produit scalaire, cf. Rap. 1.44), c.-à-d.,* A *est dans* G *ssi, pour tout* $x, y \in \mathcal{V}$*, on a*

$$\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle.$$

Les formes respectives sont données comme suit :
Pour $\mathrm{O}(d)$ *:*
$\mathbb{K} = \mathbb{R}$*,* $\mathcal{V} = \mathbb{R}^d$ *et* $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^d x_i y_i$
Pour $\mathrm{U}(d)$ *:*
$\mathbb{K} = \mathbb{C}$*,* $\mathcal{V} = \mathbb{C}^d$ *et* $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^d \bar{x}_i y_i$

Pour $\mathrm{O}(d,\mathbb{C})$ *:*
$\mathbb{K}=\mathbb{C}$*,* $\mathcal{V}=\mathbb{C}^d$ *et* $\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^d x_iy_i$

Pour $\mathrm{O}(p,q)$ *:*
$\mathbb{K}=\mathbb{R}$*,* $\mathcal{V}=\mathbb{R}^{p+q}$ *et* $\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^p x_iy_i-\sum_{i=p+1}^{p+q} x_iy_i$

Pour $\mathrm{Sp}(d,\mathbb{R})$ *:*
$\mathbb{K}=\mathbb{R}$*,* $\mathcal{V}=\mathbb{R}^{2d}$ *et* $\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^d (x_iy_{d+i}-x_{d+i}y_i)$

Pour $\mathrm{Sp}(d,\mathbb{C})$ *:*
$\mathbb{K}=\mathbb{C}$*,* $\mathcal{V}=\mathbb{C}^{2d}$ *et* $\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^d (x_iy_{d+i}-x_{d+i}y_i)$

1.3 Compacité

Définition 1.19 *Un GLM G s'appelle* **compact** *s'il a les propriétés suivantes :*
(C1) Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans G t.q. $A_n\to A\in\mathrm{Mat}(d,\mathbb{C})$, on a $A\in G$.
(C2) Il existe une constante $C>0$ t.q. $|A_{ij}|\le C$ pour tout $A\in G$ et tout $i,j\in\{1,\dots,d\}$.

Remarque 1.20

(a) En identifiant $\mathrm{Mat}(d,\mathbb{C})$ avec $\mathbb{C}^{d^2}$, Déf. 1.19 exprime le fait que G est compact ssi G est un sous-emsemble fermé (condition (C1)) et borné (condition (C2)) de $\mathbb{C}^{d^2}$.

(b) On peut montrer que tous les groupes classiques sauf $\mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}(d,\mathbb{C})$ satisfont (C1). Il ne nous reste donc que (C2) à vérifier.

Proposition 1.21

(a) Les groupes classiques $\mathrm{O}(d)$, $\mathrm{SO}(d)$, $\mathrm{U}(d)$, $\mathrm{SU}(d)$ et $\mathrm{Sp}(d)$ sont compacts.

(b) Tous les autres groupes classiques ne sont pas compacts en général (certains le sont pour $d=1$).

Démonstration 1.21

(a) D'après Rem. 1.20 *(b)* (cf. également la démonstration de Prop. 1.10, et Prop. 1.16), il ne reste que *(C2)* à vérifier.
Pour $\mathrm{O}(d)$:
Pour tout $A\in\mathrm{O}(d)$ et tout $i\in\{1,\dots,d\}$, on a

$$1=(A^TA)_{ii}=\sum_{j=1}^d A_{ji}^2,$$

d'où $|A_{ij}|\le 1$ pour tout $i,j\in\{1,\dots,d\}$ parce que $A_{ij}\in\mathbb{R}$ pour tout $i,j\in\{1,\dots,d\}$.
Pour $\mathrm{U}(d)$:
De manière analogue, pour tout $A\in\mathrm{U}(d)$, on a $1=\sum_{j=1}^d|A_{ji}|^2$ pour tout $i\in\{1,\dots,d\}$, et donc, $|A_{ij}|\le 1$ pour tout $i,j\in\{1,\dots,d\}$.
Pour $\mathrm{SO}(d)$, $\mathrm{SU}(d)$ et $\mathrm{Sp}(d)$:
La compacité de ces GLM est une conséquence de la compacité de $\mathrm{O}(d)$ et de $\mathrm{U}(d)$.

(b) Nous notons d'abord que $\mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}(d,\mathbb{C})$ ne sont pas fermés dans $\mathrm{Mat}(d,\mathbb{C})$:
Exemple : Soit $A_n = \mathrm{diag}[1,1,\ldots,1,1/n] \in \mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$. Alors, dans la limite $n \to \infty$, on obtient $A_n \to A = \mathrm{diag}[1,1,\ldots,1,0] \notin \mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$.
En ce qui concerne $\mathrm{SL}(d,\mathbb{R})$ et $\mathrm{SL}(d,\mathbb{C})$, on a $\mathrm{SL}(1,\mathbb{R}) = \mathrm{SL}(1,\mathbb{C}) = \{1\}$, et donc, ces groupes sont compacts pour $d = 1$. Mais ils ne sont plus bornés pour $d \geq 2$.
Exemple : $A_n = \mathrm{diag}[n, 1/n, 1, 1, \ldots, 1] \in \mathrm{SL}(d,\mathbb{R})$.
Cf. Exr. 5 pour les cas restants.

□

1.4 Connexité

Définition 1.22 *Soit G un GLM et soient $A, B \in G$. On dit que A* **est relié à** *B s'il existe un* **chemin** *dans G, c.-à-d., une application $\Gamma \in C([0,1],G)$ (cf. Déf. 1.5), t.q.*

$$\Gamma(0) = A, \quad \Gamma(1) = B.$$

Proposition 1.23 *La relation définie par $A \sim B :\Leftrightarrow$ "A est relié à B." est une relation d'équivalence (cf. Rap. 1.45).*

Démonstration 1.23 Cf. Exr. 6 □

Définition 1.24 *Les classes d'équivalence de la relation d'équivalence de Prop. 1.23 s'appellent les* **composantes (connexes)** *de G.*
Un GLM G s'appelle **connexe** *si tout $A \in G$ est relié à tout $B \in G$, c.-à-d., si G consiste en une seule composante connexe.*
La composante connexe de l'identité d'un GLM G est notée G_e.

La composante connexe de l'identité d'un GLM a la propriété suivante.

Proposition 1.25 *Soit G un GLM. Alors, G_e est un sous-groupe de G.*

Démonstration 1.25 Cf. Exr. 7 □

Nous commençons par étudier la connexité des groupes linéaires complexes.

Proposition 1.26

(a) $\mathrm{GL}(d,\mathbb{C})$ *est connexe pour tout $d \in \mathbb{N}^*$.*

(b) $\mathrm{SL}(d,\mathbb{C})$ *est connexe pour tout $d \in \mathbb{N}^*$.*

Démonstration 1.26

(a) $d = 1$: Comme $\mathrm{GL}(1, \mathbb{C}) = \{A \in \mathbb{C} \,|\, A \neq 0\} = \mathbb{C}^*$, tous les $A, B \in \mathrm{GL}(1, \mathbb{C})$ peuvent être reliés par un chemin dans $\mathrm{GL}(1, \mathbb{C})$.

$d \geq 2$: Il suffit de montrer que tout $A \in \mathrm{GL}(d, \mathbb{C})$ est relié à $1 := 1_d \in \mathrm{GL}(d, \mathbb{C})$. Soit donc $A \in \mathrm{GL}(d, \mathbb{C})$. Alors, d'après le théorème de la décomposition de Schur (cf. Rap. 1.46), il existe $U \in \mathrm{U}(d)$ t.q. $A = UBU^*$, où B est une matrice triangulaire supérieure ayant les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{C}$ de A sur sa diagonale, c.-à-d. ,

$$B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_d \end{bmatrix}.$$

Comme $A \in \mathrm{GL}(d, \mathbb{C})$, et comme nous avons

$$0 \neq \det(A) = \det(UBU^*) = \det(U)\det(B)\det(U^{-1}) = \det(B) = \prod_{i=1}^{d} \lambda_i,$$

on obtient que $\lambda_i \neq 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$.

Ensuite, soit $\Gamma : [0, 1] \to \mathrm{Mat}(d, \mathbb{C})$ défini, pour tout $t \in [0, 1]$, par

$$\Gamma(t) := U \begin{bmatrix} \gamma_1(t) & & (1-t)* \\ & \ddots & \\ & & \gamma_d(t) \end{bmatrix} U^*,$$

où, pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$, les fonctions $\gamma_i \in C([0, 1], \mathbb{C}^*)$ sont telles que $\gamma_i(0) = \lambda_i$ et $\gamma_i(1) = 1$ (comme dans le cas $d = 1$ ci-dessus, de telles fonctions existent toujours). Il en résulte que $\Gamma \in C([0, 1], \mathrm{Mat}(d, \mathbb{C}))$ et que $\Gamma(0) = A$ et $\Gamma(1) = 1$. En plus, comme $\det(\Gamma(t)) = \prod_{i=1}^{d} \gamma_i(t) \neq 0$ pour tout $t \in [0, 1]$, on arrive à $\Gamma \in C([0, 1], \mathrm{GL}(d, \mathbb{C}))$.

(b) $d = 1$: On a $\mathrm{SL}(1, \mathbb{C}) = \{1\}$.

$d \geq 2$: Soit $A \in \mathrm{SL}(d, \mathbb{C})$ et soit $\tilde{\Gamma} : [0, 1] \to \mathrm{Mat}(d, \mathbb{C})$ défini, pour tout $t \in [0, 1]$, par

$$\tilde{\Gamma}(t) := U \begin{bmatrix} \gamma_1(t) & & (1-t)* \\ & \ddots & \\ & & \tilde{\gamma}_d(t) \end{bmatrix} U^*,$$

où $U \in \mathrm{U}(d)$ et $\gamma_1, \ldots, \gamma_{d-1} \in C([0, 1], \mathbb{C}^*)$ sont définis comme dans *(a)*. En plus, pour tout $t \in [0, 1]$, nous définissons

$$\tilde{\gamma}_d(t) := \frac{1}{\prod_{i=1}^{d-1} \gamma_i(t)},$$

ce qui implique que $\tilde{\gamma}_d \in C([0, 1], \mathbb{C}^*)$, que $\tilde{\gamma}_d(0) = 1/\prod_{i=1}^{d-1} \lambda_i$ et que $\tilde{\gamma}_d(1) = 1$. Alors, on obtient $\tilde{\Gamma} \in C([0, 1], \mathrm{SL}(d, \mathbb{C}))$ parce que $\det(\tilde{\Gamma}(t)) = \tilde{\gamma}_d(t) \prod_{i=1}^{d-1} \gamma_i(t) = 1$ pour tout $t \in [0, 1]$.

□

De manière analogue, on montre la connexité des groupes unitaires.

Proposition 1.27

(a) $\mathrm{U}(d)$ *est connexe pour tout* $d \in \mathbb{N}^*$.

(b) $\mathrm{SU}(d)$ *est connexe pour tout* $d \in \mathbb{N}^*$.

Démonstration 1.27 Cf. Exr. 8 $\square$

Par contre, le groupe linéaire général <u>réel</u> n'est pas connexe.

Proposition 1.28 *Le GLM* $\mathrm{GL}(d, \mathbb{R})$ *n'est pas connexe. Il consiste en les deux composantes connexes*

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}^+(d, \mathbb{R}) &:= \{A \in \mathrm{GL}(d, \mathbb{R}) \,|\, \det(A) > 0\}, \\ \mathrm{GL}^-(d, \mathbb{R}) &:= \{A \in \mathrm{GL}(d, \mathbb{R}) \,|\, \det(A) < 0\}. \end{aligned}$$

Démonstration 1.28 Soient $A, B \in \mathrm{GL}(d, \mathbb{R})$ t.q. $\det(A) > 0$ et $\det(B) < 0$, et supposons qu'il existe un chemin $\Gamma \in C([0,1], \mathrm{GL}(d, \mathbb{R}))$ t.q. $\Gamma(0) = A$ et $\Gamma(1) = B$. Comme la fonction

$$\det \circ \Gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$$

est continue, il existe $t_0 \in (0,1)$ t.q. $\det(\Gamma(t_0)) = 0$ (d'après le théorème des valeurs intermédiaires du cours d'analyse), c.-à-d., $\Gamma(t_0) \notin \mathrm{GL}(d, \mathbb{R})$, d'où nous arrivons à une contradiction. Alors, il n'existe pas de chemin qui relie A et B, c.-à-d., $\mathrm{GL}(d, \mathbb{R})$ n'est pas connexe. Ensuite, on peut montrer que $\mathrm{GL}^+(d, \mathbb{R})$ est connexe. Cela permet de montrer facilement que $\mathrm{GL}^-(d, \mathbb{R})$ est également connexe. Pour ce faire, soit $C \in \mathrm{GL}^-(d, \mathbb{R})$. Alors, pour tout $A, B \in \mathrm{GL}^-(d, \mathbb{R})$, on a $C^{-1}A, C^{-1}B \in \mathrm{GL}^+(d, \mathbb{R})$. Si $\Gamma \in C([0,1], \mathrm{GL}^+(d, \mathbb{R}))$ est un chemin qui relie $C^{-1}A$ et $C^{-1}B$, alors le chemin $t \mapsto C\Gamma(t)$ appartient à $C([0,1], \mathrm{GL}^-(d, \mathbb{R}))$ et relie A et B. $\square$

On peut montrer les propriétés de connexité suivantes.

Proposition 1.29

GLM	*Connexe ?*	*Composantes*
$\mathrm{GL}(d, \mathbb{C})$	*oui*	1
$\mathrm{SL}(d, \mathbb{C})$	*oui*	1
$\mathrm{GL}(d, \mathbb{R})$	*non*	2
$\mathrm{SL}(d, \mathbb{R})$	*oui*	1
$\mathrm{O}(d)$	*non*	2
$\mathrm{SO}(d)$	*oui*	1
$\mathrm{U}(d)$	*oui*	1
$\mathrm{SU}(d)$	*oui*	1
$\mathrm{O}(p, 1)$	*non*	4
$\mathrm{SO}(p, 1)$	*non*	2

Nous aurons également besoin de la notion de connexité suivante qui est plus forte que la notion précédente.

Définition 1.30 *Un GLM G s'appelle* **simplement connexe** *s'il a les propriétés suivantes :*
(CS1) G est connexe.
(CS2) Tout lacet dans G (c.-à-d., tout chemin $\Gamma \in C([0,1], G)$ t.q. $\Gamma(0) = \Gamma(1)$) peut se contracter continûment à un point, c.-à-d., pour tout lacet $\Gamma \in C([0,1], G)$, il existe une application $\Lambda \in C([0,1] \times [0,1], G)$ t.q.

$$\begin{cases} \Lambda(s,0) = \Lambda(s,1), & s \in [0,1], \\ \Lambda(0,t) = \Gamma(t), & t \in [0,1], \\ \Lambda(1,t) = \Lambda(1,0), & t \in [0,1]. \end{cases}$$

Proposition 1.31 $\mathrm{SU}(2)$ *est simplement connexe.*

Démonstration 1.31 D'après Prop. 1.11 *(b)*, $\mathrm{SU}(2)$ s'identifié avec la 3-sphère unité

$$S^3 := \{(x_1, \ldots, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1^2 + \ldots + x_4^2 = 1\}.$$

En plus, on peut montrer que S^3 est simplement connexe. $\square$

Remarque 1.32 *La connexité simple est fondamentale. Un de nos théorèmes principaux (Thm. 3.6) dira que, si le GLM G est simplement connexe, il existe une correspondance bijective entre les représentations de G et les représentations de son algèbre de Lie.*

On peut montrer la proposition suivante.

Proposition 1.33 *Nous avons les propriétés de connexité simple suivantes (les GLM de la première partie du tableau sont compacts) :*

GLM	*Simplement connexe ?*
$\mathrm{SO}(d)$ *pour* $d \geq 2$	*non*
$\mathrm{U}(d)$	*non*
$\mathrm{SU}(d)$	*oui*
$\mathrm{Sp}(d)$	*oui*
$\mathrm{GL}^+(d, \mathbb{R})$ *pour* $d \geq 2$	*non*
$\mathrm{GL}(d, \mathbb{C})$	*non*
$\mathrm{SL}(d, \mathbb{R})$ *pour* $d \geq 2$	*non*
$\mathrm{SL}(d, \mathbb{C})$	*oui*
$\mathrm{SO}(d, \mathbb{C})$	*non*
$\mathrm{SO}_e(1,1)$	*oui*
$\mathrm{SO}_e(p,1)$ *pour* $p \geq 2$	*non*
$\mathrm{Sp}(d, \mathbb{R})$	*non*
$\mathrm{Sp}(d, \mathbb{C})$	*oui*

1.5 Homomorphismes

Définition 1.34 *Soient G et H des groupes. Un* **homomorphisme de groupes** *de G dans H est une application $\Phi : G \to H$ ayant la propriété suivante (pour tout $g, h \in G$) :*
(HG) $\Phi(gh) = \Phi(g)\Phi(h)$
Si Φ est bijectif, il s'appelle un **isomorphisme de groupes**.

Exemple 1.35 *Soit $\{e_\alpha\}_{\alpha=0}^3$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^4$, nous notons*

$$x = x_0 e_0 + \vec{x}\vec{e},$$

où $\vec{x} := (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $\vec{e} := (e_1, e_2, e_3) \in (\mathbb{R}^4)^3$ et $\vec{x}\vec{e} := \sum_{i=1}^3 x_i e_i \in \mathbb{R}^4$.

(a) L'ensemble $\mathbb{H} := (\mathbb{R}^4)^*$, muni de la multiplication $\mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, notée $(x, y) \mapsto xy$ (où $x = x_0 e_0 + \vec{x}\vec{e}$ et $y = y_0 e_0 + \vec{y}\vec{e}$) et définie par

$$xy := (x_0 y_0 - \vec{x} \cdot \vec{y})e_0 + (x_0 \vec{y} + y_0 \vec{x} + \vec{x} \wedge \vec{y})\vec{e},$$

où $\vec{x} \cdot \vec{y}$ signifie le produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^3$, est un groupe. Il s'appelle le groupe des **quaternions**.

(b) L'ensemble $\mathbb{H}_1 := S^3$, muni de la même multiplication, est également un groupe. Il s'appelle le groupe des **quaternions normés**.

(c) Il existe un isomorphisme de groupes $\mathbb{H}_1 \to \mathrm{SU}(2)$.

Avant de passer à la démonstration de Ex. 1.35, nous introduisons une famille de matrices importantes que nous rencontrerons fréquemment par la suite.

Définition 1.36 *Les matrices $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{C})$, définies par*

$$\sigma_1 := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 := \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

s'appellent les **matrices de Pauli**. *On y ajoutera souvent l'identité pour laquelle on utilisera la notation $\sigma_0 := 1_2 \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{C})$.*

Démonstration 1.35

(a) Comme on peut facilement vérifier que la multiplication donnée est associative, que l'identité est égale à e_0 et que l'inverse de $x \in \mathbb{H}$ a la forme

$$x^{-1} = \frac{\bar{x}}{|x|^2},$$

où $\bar{x} := x_0 e_0 - \vec{x}\vec{e}$ et $|x|^2 := \sum_{\alpha=0}^3 x_\alpha^2$, l'ensemble $\mathbb{H}$ est un groupe.

(b) On peut facilement vérifier que, pour tout $x, y \in \mathbb{H}$, on a

$$|xy|^2 = |x|^2|y|^2,$$
$$|x^{-1}| = |x|^{-1},$$
$$|e_0| = 1.$$

Alors, l'ensemble $\mathbb{H}_1$, c.-à-d., l'ensemble des $x \in \mathbb{H}$ t.q. $|x| = 1$, est un groupe.

(c) Soit l'application $\Phi : \mathbb{H}_1 \to \mathrm{SU}(2)$ définie, pour tout $x \in \mathbb{H}_1$, par

$$\Phi(x) := x_0\sigma_0 - \mathrm{i}\vec{x}\vec{\sigma},$$

où $\vec{\sigma} := (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{C})^3$ est le vecteur contenant les matrices de Pauli de Déf. 1.36, et $\vec{x}\vec{\sigma} := \sum_{i=1}^{3} x_i\sigma_i$. D'après Prop. 1.11 *(b)*, on a

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} x_0 - \mathrm{i}x_3 & -x_2 - \mathrm{i}x_1 \\ x_2 - \mathrm{i}x_1 & x_0 + \mathrm{i}x_3 \end{bmatrix} \in \mathrm{SU}(2)$$

parce que $|x|^2 = \sum_{\alpha=0}^{3} x_\alpha^2 = |x_0 - \mathrm{i}x_3|^2 + |x_2 + \mathrm{i}x_1|^2 = 1$ pour tout $x \in \mathbb{H}_1$. En outre, en utilisant le fait que

$$\boxed{(\vec{x}\vec{\sigma})(\vec{y}\vec{\sigma}) = (\vec{x} \cdot \vec{y})\sigma_0 + \mathrm{i}(\vec{x} \wedge \vec{y})\vec{\sigma},} \tag{1}$$

on vérfifie facilement que $\Phi(xy) = \Phi(y)\Phi(y)$ pour tout $x, y \in \mathbb{H}_1$.
Finalement, comme $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha=0}^{3}$ est une base de $\mathrm{Mat}(2, \mathbb{C})$, Φ est injectif et, d'après Prop. 1.11 *(b)*, Φ est également surjectif.

$\square$

Remarque 1.37 *On posant* $1 = e_0$, $\mathrm{i} = e_1$, $\mathrm{j} = e_2$, $\mathrm{k} = e_3$, *on obtient de Ex. 1.35 la célèbre formule des quaternions (Hamilton, 1843)*

$$\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = \mathrm{ijk} = -1.$$

Pour la définition d'un homomorphisme de groupes entre deux GLM, nous demandons une propriété supplémentaire.

Définition 1.38 *Soient G et H des GLM. Un* **homomorphisme de groupes de Lie (HGL)** *de G dans H est une application $\Phi : G \to H$ ayant les propriétés suivantes :*

(HGL1) Φ est un homomorphisme de groupes.

(HGL2) $\boxed{\Phi \text{ est continu}}$.

Si Φ est bijectif et Φ^{-1} est continu, Φ s'appelle un **isomorphisme de groupes de Lie (IGL)**. *Si G et H sont* **isomorphes**, *c.-à-d., s'il existe un IGL entre G et H, on écrira* $\boxed{G \cong H}$.

Exemple 1.39

(a) L'application $\det : \mathrm{GL}(d, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}^*$ *est un HGL.*

(b) L'application $R : \mathbb{R} \to \mathrm{SO}(2)$*, définie, pour tout* $\theta \in \mathbb{R}$*, par*

$$R(\theta) := \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix},$$

est un HGL.

Démonstration 1.39 Cf. Exr. 9 □

A présent, nous allons construire un HGL entre $\mathrm{SU}(2)$ et $\mathrm{SO}(3)$ qui jouera un certain rôle plus tard.

Proposition 1.40 $\mathrm{SU}(2)$ *et* $\mathrm{SO}(3)$ *sont continûment homomorphes.*

Démonstration 1.40 Nous définissons l'ensemble

$$\mathcal{V} := \{A \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{C}) \mid A^* = A \text{ et } \mathrm{tr}(A) = 0\},$$

où $\mathrm{tr}(A) := \sum_{i=1}^d A_{ii}$ pour tout $A \in \mathrm{Mat}(d, \mathbb{C})$ est la trace de A (cf. Déf. 2.1). Cet ensemble a les propriétés suivantes :

(a) $\mathcal{V}$ est un espace vectoriel réel p.r. à l'addition matricielle et la multiplication d'une matrice par un scalaire dans $\mathbb{R}$ (cf. Rap. 1.43) :
Pour tout $A, B \in \mathcal{V}$ et tout $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$, on a $(\lambda A + \mu B)^* = \lambda A^* + \mu B^* = \lambda A + \mu B$ et $\mathrm{tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \mathrm{tr}(A) + \mu \mathrm{tr}(B) = 0$.

(b) L'application $(\cdot\,, \cdot) : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$, définie par $(A, B) := \mathrm{tr}(AB)/2$, est un produit scalaire sur $\mathcal{V}$ (cf. Rap. 1.44 ; comme $2\overline{(A, B)} = \overline{\mathrm{tr}(AB)} = \mathrm{tr}((AB)^*) = \mathrm{tr}(B^*A^*) = \mathrm{tr}(BA) = \mathrm{tr}(AB) = 2(A, B) \in \mathbb{R}$, le produit scalaire est bien défini).
Pour tout $A, B, C \in \mathcal{V}$ et tout $\beta \in \mathbb{C}$, on a :
(PS1) $2(A, A) = \mathrm{tr}(AA) = \mathrm{tr}(A^*A) = \sum_{i,j=1,2} |A_{ij}|^2 \geq 0$
(PS2) $(A, A) = 0$ ssi $A = 0$
(PS3) $2(A, B + C) = \mathrm{tr}(A(B + C)) = \mathrm{tr}(AB) + \mathrm{tr}(AC) = 2(A, B) + 2(A, C)$
(PS4) $2(A, \beta B) = \mathrm{tr}(A\beta B) = \beta \mathrm{tr}(AB) = \beta(A, B)$
(PS5) $(A, B) = \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA) = (B, A)$

(c) Les matrices de Pauli $\{\sigma_i\}_{i=1}^3$ (cf. Dém. 1.35) forment une base orthonormée de $\mathcal{V}$ p.r. au produit scalaire de *(b)* :
Pour tout $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{C})$, on a $A \in \mathcal{V}$ ssi $\bar{a} = a$, $\bar{b} = c$ et $d = -a$. Alors, en utilisant la notation $x_1 := \mathrm{Re}(b)$, $x_2 := -\mathrm{Im}(b)$ et $x_3 := a$, on obtient $A = \sum_{i=1}^3 x_i \sigma_i$. En plus, en utilisant (1) de Dém. 1.35 *(c)* et la base canonique $\{e_i\}_{i=1}^3$ de $\mathbb{R}^3$, on a

$$\begin{aligned} 2(\sigma_i, \sigma_j) &= \mathrm{tr}(\sigma_i \sigma_j) = \mathrm{tr}((e_i \vec{\sigma})(e_j \vec{\sigma})) = \mathrm{tr}((e_i \cdot e_j)\sigma_0 + \mathrm{i}(e_i \wedge e_j)\vec{\sigma}) \\ &= \underbrace{e_i \cdot e_j}_{=\,\delta_{ij}} \underbrace{\mathrm{tr}(\sigma_0)}_{=\,2} + \mathrm{i} \sum_{k=1}^3 (e_i \wedge e_j)_k \underbrace{\mathrm{tr}(\sigma_k)}_{=\,0}. \end{aligned}$$

(d) Il existe un HGL entre $\mathrm{SU}(2)$ et $\mathrm{SO}(3)$:
D'abord, nous identifions $\mathcal{V}$ et $\mathbb{R}^3$ par l'isomorphisme d'espaces vectoriels $\varphi : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^3$ défini par $\varphi(\sigma_i) := e_i$ pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$ (et, par extension linéaire, sur la totalité de l'espace vectoriel $\mathcal{V}$). En plus, nous notons que $\langle \varphi(A), \varphi(B) \rangle = (A, B)$ pour tout $A, B \in \mathcal{V}$, où $\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{3} x_i y_i$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}^3$ est le produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^3$.
Ensuite, nous définissons une application $\Phi : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$ par

$$\Phi(U)x := \varphi(U\varphi^{-1}(x)U^*) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^3,$$

illustrée dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{V} \arrow[r, "U \cdot U^*"] & \mathcal{V} \arrow[d, "\varphi"] \\
\mathbb{R}^3 \arrow[u, "\varphi^{-1}"] \arrow[r, "\Phi(U)"'] & \mathbb{R}^3
\end{tikzcd}$$

Cette application est bien définie parce que, premièrement, pour tout $A \in \mathcal{V}$, on a en effet $UAU^* \in \mathcal{V}$ car $(UAU^*)^* = UA^*U^* = UAU^*$ et $\mathrm{tr}(UAU^*) = \mathrm{tr}(AU^*U) = \mathrm{tr}(A) = 0$. Deuxièmement, pour tout $x, y \in \mathbb{R}^3$, on a

$$\begin{aligned}
\langle \Phi(U)x, \Phi(U)y \rangle &= \langle \varphi(U\varphi^{-1}(x)U^*), \varphi(U\varphi^{-1}(y)U^*) \rangle = (U\varphi^{-1}(x)U^*, U\varphi^{-1}(y)U^*) \\
&= \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(U\varphi^{-1}(x)U^*U\varphi^{-1}(y)U^*) = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(\varphi^{-1}(x)\varphi^{-1}(y)) = (\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y)) \\
&= \langle x, y \rangle,
\end{aligned}$$

ce qui revient à dire, d'après Rem. 1.18, que $\Phi(U) \in \mathrm{O}(3)$.
Ensuite, nous montrons que Φ est un HGL (cf. Déf. 1.38) :
(HGL1) Φ est un homomorphisme de groupes parce que, pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, on a

$$\Phi(U_1U_2)x = \varphi(U_1U_2\varphi^{-1}(x)U_2^*U_1^*) = \varphi(U_1\varphi^{-1}[\varphi(U_2\varphi^{-1}(x)U_2^*)]U_1^*) = \Phi(U_1)[\Phi(U_2)x].$$

(HGL2) Φ est continu.
Finalement, on montrera dans Exr. 10 que Φ n'est pas injectif et que l'ensemble image de Φ, noté $\mathrm{ran}\,(\Phi) := \{\Phi(U) \,|\, U \in \mathrm{SU}(2)\}$, a la propriété $\mathrm{ran}\,(\Phi) \subseteq \mathrm{SO}(3)$.

$\square$

Remarque 1.41 *Nous allons montrer plus tard que tout élément de l'ensemble d'arrivée* $\mathrm{SO}(3)$ *de* Φ *a exactement les antécédants* $\pm U$*. L'importance de l'application* Φ *réside dans le fait qu'elle nous permet de faire un lien entre les questions concernant le groupe non simplement connexe* $\mathrm{SO}(3)$ *et le groupe simplement connexe* $\mathrm{SU}(2)$*.*

Rappels

Rappel 1.42 *Un* **corps** *est un ensemble $\mathbb{K}$ muni d'une* **addition** $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$*, notée* $(a, b) \mapsto a + b$*, et d'une* **multiplication** $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$*, notée* $(a, b) \mapsto ab$ *ayant les propriétés suivantes :*
(K1) $\mathbb{K}$ *est un groupe abélien p.r. à l'addition avec l'identité notée* 0*.*
(K2) $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ *est un groupe abélien p.r. à la multiplication avec l'identité notée* 1*.*
(K3) $a(b + c) = ab + ac$ *et* $(a + b)c = ac + bc$ *pour tout* $a, b, c \in \mathbb{K}$ *(***distributivité***)*

Rappel 1.43 *Soit $\mathbb{K}$ un corps. Un* **espace vectoriel** *sur $\mathbb{K}$ est un ensemble $\mathcal{V}$ muni d'une* **addition** $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$*, notée* $(u, v) \mapsto u + v$*, et d'une* **multiplication par un scalaire** $\mathbb{K} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$*, notée* $(\lambda, u) \mapsto \lambda u$*, ayant les propriétés suivantes (pour tout* $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ *et tout* $u, v \in \mathcal{V}$*) :*
(V1) $\mathcal{V}$ *est un groupe abélien p.r. à l'addition avec l'identité notée* 0*.*
(V2) $(\lambda + \mu)u = (\lambda u) + (\mu u)$
(V3) $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$
(V4) $1u = u$
(V5) $\lambda(u + v) = (\lambda u) + (\lambda v)$ *(***distributivité (à gauche)***)*

Rappel 1.44 *Soit $\mathcal{V}$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Un* **produit scalaire** *sur $\mathcal{V}$ est une application* $(\cdot, \cdot) : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{K}$ *ayant les propriétés suivantes (pour tout* $\alpha \in \mathbb{K}$ *et tout* $u, v, w \in \mathcal{V}$*) :*

(PS1) $(u, u) \geq 0$

(PS2) $(u, u) = 0$ *ssi* $u = 0$

(PS3) $(u, v + w) = (u, v) + (u, w)$

(PS4) $(u, \alpha v) = \alpha(u, v)$ *(attention à la convention !)*

(PS5) $(u, v) = \overline{(v, u)}$

Rappel 1.45 *Soit E un ensemble. Une* **relation d'équivalence** *sur E est un sous-ensemble* $R \subseteq E \times E$ *ayant les propriétés suivantes :*
(R1) $(x, x) \in R$ *pour tout* $x \in E$ *(***réflexivité***)*
(R2) Soient $x, y \in E$ *t.q.* $(x, y) \in R$*. Alors,* $(y, x) \in R$*. (***symétrie***)*
(R3) Soient $x, y, z \in E$ *t.q.* $(x, y) \in R$ *et* $(y, z) \in R$*. Alors,* $(x, z) \in R$*. (***transitivité***)*
On écrit souvent $x \sim_R y$ *ou simplement* $x \sim y$ *au lieu de* $(x, y) \in R$*. Une* **classe d'équivalence** *de* $x \in E$ *(p.r. à R), notée* $[x]$*, est définie par* $[x] := \{y \in E \mid (x, y) \in R\}$*. Un élément* $y \in [x]$ *s'appelle un* **représentant** *de* $[x]$*.*

Rappel 1.46 (Décomposition de Schur) *Soit* $A \in \mathrm{Mat}(d, \mathbb{C})$ *et soient* $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{C}$ *les valeurs propres de A (cf. Rap. 1.48) dans un ordre quelconque. Alors, il existe* $U \in \mathrm{U}(d)$ *t.q.*

$$A = U \begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_d \end{bmatrix} U^*,$$

où $*$ représente toutes les entrées (non specifiées) au-dessus de la diagonale et l'absence d'entrées en-dessous de la diagonale signifie que toutes ces entrées sont égales à 0, c.-à-d., que A est unitairement semblable à une matrice triangulaire supérieure ayant les valeurs propres de A sur sa diagonale.

Rappel 1.47 (Théorème spectral) *Pour tout* $A \in \mathrm{U}(d)$*, il existe* $U \in \mathrm{U}(d)$ *et* $\theta_1, \ldots, \theta_d \in \mathbb{R}$ *t.q.* $A = U\mathrm{diag}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}, \ldots, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_d}]U^*$*.*

Rappel 1.48 *Soit* $A \in \mathrm{Mat}(d, \mathbb{C})$*. Un nombre* $\lambda \in \mathbb{C}$ *s'appelle une* **valeur propre** *de A s'il existe* $x \in \mathbb{C}^d$ *avec* $x \neq 0$ *t.q.* $Ax = \lambda x$*. Ce vecteur* $x \in \mathbb{C}^d$ *s'appelle un* **vecteur propre** *de A. Si λ est une valeur propre de A, le sous-espace* $U_\lambda := \{x \in \mathbb{C}^d \mid Ax = \lambda x\}$ *de $\mathbb{C}^d$ s'appelle l'***espace propre** *de A associé à la valeur propre λ.*

Rappel 1.49 *Soit* $A \in \mathrm{Mat}(d,\mathbb{C})$ *et soient* $i,j \in \{1,\dots,d\}$*. Le* **cofacteur** *(d'indice* (i,j)*) de* A*, noté* C_{ij}*, est défini par* $C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$*, où* M_{ij} *est le* **mineur** *(d'indice* (i,j)*) de* A*, c.-à-d., le déterminant de la sous-matrice obtenue de* A *en éliminant la* i*-ième ligne et la* j*-ième colonne de* A*.*
Formules de Laplace *: Soit* $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{d} \in \mathrm{Mat}(d,\mathbb{C})$ *et soient* $\alpha, \beta \in \{1,\dots,d\}$ *fixés. Alors,* $\det(A)$ *possède les développements p.r. à la* α*-ième ligne ou la* β*-ième colonne donnés par* $\det(A) = \sum_{j=1}^{d} a_{\alpha j}C_{\alpha j} = \sum_{i=1}^{d} a_{i\beta}C_{i\beta}$.

Rappel 1.50 *Soit* $A \in \mathrm{GL}(d,\mathbb{C})$ *et soit* $C = [C_{ij}]_{i,j=1}^{d} \in \mathrm{Mat}(d,\mathbb{C})$ *la* **comatrice** *de* A*, c.-à-d., la matrice de tous les cofacteurs de* A *(cf. Rap. 1.49). Alors, on a* $A^{-1} = C^T / \det(A)$*.*

2 Algèbres de Lie et application exponentielle

L'application exponentielle d'une matrice joue un rôle important dans la théorie des GLM. Elle entre dans le définition de l'algèbre de Lie d'un GLM et constitue le mécanisme qui permet de transférer les informations obtenues de l'algèbre de Lie vers le GLM. Comme beaucoup de calculs se font plus facilement au niveau de l'algèbre de Lie, l'application exponentielle est indispensable dans l'étude des GLM.

2.1 Exponentielle matricielle

Nous commençons par introduire un produit scalaire sur $\mathrm{Mat}(d, \mathbb{C})$ (cf. Rap. 1.44).

Définition 2.1 *L'application* $(\,\cdot\,,\cdot\,) : \mathrm{Mat}(d,\mathbb{C}) \times \mathrm{Mat}(d,\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$*, est définie, pour tout* $A, B \in \mathrm{Mat}(d,\mathbb{C})$*, par*

$$\boxed{(A, B) := \mathrm{tr}(A^* B),}$$

où l'application $\mathrm{tr} : \mathrm{Mat}(d,\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$*, défine par* $\mathrm{tr}(A) := \sum_{i=1}^{d} A_{ii}$ *pour tout* $A \in \mathrm{Mat}(d,\mathbb{C})$*, s'appelle la* **trace** *de* A*. En plus, on définit l'application* $\|\cdot\| : \mathrm{Mat}(d,\mathbb{C}) \to \mathbb{R}$ *par* $\|A\| := \sqrt{(A, A)}$ *pour tout* $A \in \mathrm{Mat}(d,\mathbb{C})$*. Ces deux applications s'appellent respectivement le produit scalaire et la norme de* **Hilbert-Schmidt***.*

Nous allons vérifier les propriétés suivantes.

Proposition 2.2

(a) Le produit scalaire de Hilbert-Schmidt est un produit scalaire.

(b) $\mathrm{Mat}(d,\mathbb{C})$ *muni de la norme de Hilbert-Schmidt est une algèbre de Banach involutive (cf. Rap. 2.44).*

(c) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite dans* $\mathrm{Mat}(d,\mathbb{C})$ *et* $A \in \mathrm{Mat}(d,\mathbb{C})$*. Alors, nous avons* $A_n \to A$ *ssi* $\|A_n - A\| \to 0$*.*

Démonstration 2.2

(a) Cf. Dém. 1.40 *(b)*

(b) D'abord, $\mathrm{Mat}(d,\mathbb{C})$ est un espace vectoriel complexe p.r. à l'addition matricielle et p.r. à la multiplication d'une matrice par un scalaire complexe. Ensuite, $\mathrm{Mat}(d,\mathbb{C})$ est une algèbre p.r. à la multiplication matricielle (cf. Rap. 2.41). En outre, l'application $\mathrm{Mat}(d,\mathbb{C}) \to \mathrm{Mat}(d,\mathbb{C})$, définie par $A \mapsto A^*$ pour tout $A \in \mathrm{Mat}(d,\mathbb{C})$, où A^* est la matrice adjointe de A, est une involution (cf. Rap. 2.43). Alors, $\mathrm{Mat}(d,\mathbb{C})$ est une algèbre involutive.
Ensuite, nous allons montrer que la norme de Hilbert-Schmidt est une norme d'algèbre

sur $\mathrm{Mat}(d,\mathbb{C})$ (cf. Rap. 2.42). D'abord, d'après *(a)*, elle est une norme d'espace vectoriel. En plus, comme, pour tout $A, B \in \mathrm{Mat}(d,\mathbb{C})$, on a

$$\|AB\|^2 = (AB, AB) = \mathrm{tr}((AB)^*AB) = \sum_{i,j=1}^{d} |(AB)_{ij}|^2 = \sum_{i,j=1}^{d} \left| \sum_{k=1}^{d} A_{ik}B_{kj} \right|^2$$
$$\overset{\text{Rap. 2.45}}{\leq} \sum_{i,j=1}^{d} \left[\left(\sum_{k=1}^{d} |A_{ik}|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{d} |B_{kj}|^2 \right)^{1/2} \right]^2 = \left(\sum_{i,k=1}^{d} |A_{ik}|^2 \right) \left(\sum_{j,k=1}^{d} |B_{kj}|^2 \right)$$
$$= \|A\|^2 \|B\|^2,$$

c.-à-d., cette norme est également sous-multiplicative (nous avons utilisé l'inégalité de Cauchy-Schwarz de Rap. 2.45 pour l'espace vectoriel $\mathbb{C}^d$ muni du produit scalaire euclidien usuel).
Finalement, comme $\mathrm{Mat}(d,\mathbb{C})$ est complet (la dimension de l'espace vectoriel $\mathrm{Mat}(d,\mathbb{C})$ est finie) et comme, pour tout $A \in \mathrm{Mat}(d,\mathbb{C})$, on a

$$\|A^*\|^2 = \mathrm{tr}((A^*)^*A^*) = \mathrm{tr}(AA^*) = \mathrm{tr}(A^*A) = \|A\|^2,$$

l'ensemble $\mathrm{Mat}(d,\mathbb{C})$ est un algèbre de Banach involutive (nous avons utilisé que la trace est **cyclique**, c.-à-d., que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ pour tout $A, B \in \mathrm{Mat}(d,\mathbb{C})$).

(c) Soit A_n une suite dans $\mathrm{Mat}(d,\mathbb{C})$ et $A \in \mathrm{Mat}(d,\mathbb{C})$. Alors, comme

$$\|A_n - A\|^2 = \mathrm{tr}((A_n - A)^*(A_n - A)) = \sum_{i,j=1}^{d} |(A_n)_{ij} - A_{ij}|^2,$$

les deux notions de convergence sont équivalentes.

□

A présent, nous arrivons à la définition principale de cette section.

Définition 2.3 *L'application* $\mathrm{Mat}(d,\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(d,\mathbb{C})$*, notée* $X \mapsto \mathrm{e}^X$ *et définie, pour tout* $X \in \mathrm{Mat}(d,\mathbb{C})$*, par la série entière matricielle*

$$\boxed{\mathrm{e}^X := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} X^n,}$$

*s'appelle l'***exponentielle matricielle***.*

Proposition 2.4 *Soit* $\mathrm{Mat}(d,\mathbb{C})$ *muni de la norme de Hilbert-Schmidt. Alors, l'exponentielle matricielle a les propriétés suivantes :*

(a) Sa série entière matricielle est absolument convergente.

(b) Elle est continue.

Remarque 2.5 *Les notions qui n'impliquent pas la* **non-commutativité** *des matrices, c.-à-d., le fait que $XY \neq YX$ en général, se traitent comme dans le cas scalaire, notamment les notions suivantes :*
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathrm{Mat}(d,\mathbb{C})$ et soit $S_N := \sum_{n=0}^{N} X_n \in \mathrm{Mat}(d,\mathbb{C})$ pour $N \in \mathbb{N}$ la suite des sommes partielles. Si $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est convergente pour $N \to \infty$ (p.r. à la norme de Hilbert-Schmidt), la matrice limite est la série notée (tout comme dans $\mathbb{C}$)

$$\sum_{n=0}^{\infty} X_n.$$

La série s'appelle **absolument convergente** *si la série*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|X_n\|$$

converge dans $\mathbb{R}$. Nous notons que toute série dans $\mathrm{Mat}(d,\mathbb{C})$ qui est absolument convergente est convergente.
Si deux séries de matrices convergent absolument, alors leur produit peut s'écrire à l'aide de la formule du produit de Cauchy (qui converge absolument, cf. Dém. 2.6 (e) pour une application).

Démonstration 2.4

(a) D'après Prop. 2.2 *(b)*, la norme de Hilbert-Schmidt sur $\mathrm{Mat}(d,\mathbb{C})$ est sous-multiplicative. Alors, on peut écrire

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|\tfrac{1}{n!} X^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|X\|^n}{n!} = \mathrm{e}^{\|X\|} < \infty.$$

(b) En utilisant l'identité suivante pour tout $A, B \in \mathrm{Mat}(d,\mathbb{C})$ et $n \in \mathbb{N}^*$ (à comparer avec le cas des nombres complexes commutatifs),

$$A^n - B^n = \sum_{i=0}^{n-1} A^{n-1-i}(A-B)B^i,$$

on a, pour tout $X, Y \in \mathrm{Mat}(d,\mathbb{C})$, que

$$\begin{aligned}
\left\|\mathrm{e}^X - \mathrm{e}^Y\right\| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \|X^n - Y^n\| \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{\|X\|^{n-1-i}}_{\leq (\|X\|+\|X-Y\|)^{n-1-i}} \|X-Y\| \underbrace{\|Y\|^i}_{\leq (\|X\|+\|X-Y\|)^i} \\
&\leq \|X-Y\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n-1} (\|X\| + \|X-Y\|)^{n-1} \\
&= \|X-Y\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} (\|X\| + \|X-Y\|)^{n-1} \\
&= \|X-Y\| \, \mathrm{e}^{\|X\|+\|X-Y\|}.
\end{aligned}$$

Alors, pour un X fixé et toute suite $X_n \to X$, on a $\mathrm{e}^{X_n} \to \mathrm{e}^X$, c.-à-d., l'exponentielle matricielle est continue au point X. Comme X est quelconque, l'exponentielle matricielle est continue en tout point de $\mathrm{Mat}(d, \mathbb{C})$.

□

Dans l'énoncé suivant, nous réunissons quelques propriétés importantes de l'exponentielle matricielle.

Proposition 2.6 *Soient* $X, Y \in \mathrm{Mat}(d, \mathbb{C})$*. Alors :*

(a) $\mathrm{e}^0 = 1$

(b) $\left(\mathrm{e}^X\right)^* = \mathrm{e}^{X^*}$

(c) $\mathrm{e}^X \in \mathrm{GL}(d, \mathbb{C})$ *et* $\left(\mathrm{e}^X\right)^{-1} = \mathrm{e}^{-X}$

(d) $\mathrm{e}^{(\lambda+\mu)X} = \mathrm{e}^{\lambda X}\mathrm{e}^{\mu X}$ *pour tout* $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$

(e) *Le* **commutateur** *de* X *et* Y *est défini par*

$$\boxed{[X, Y] := XY - YX}.$$

Si $[X, Y] = 0$*, c.-à-d., si* X *et* Y **commutent***, alors* $\mathrm{e}^{X+Y} = \mathrm{e}^X\mathrm{e}^Y$*.*

(f) $\mathrm{e}^{CXC^{-1}} = C\mathrm{e}^X C^{-1}$ *pour tout* $C \in \mathrm{GL}(d, \mathbb{C})$

(g) $\|\mathrm{e}^X\| \leq \mathrm{e}^{\|X\|}$

(h) *L'application* $\mathbb{R} \ni t \mapsto \mathrm{e}^{tX} \in \mathrm{GL}(d, \mathbb{C})$ *est dérivable et* $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{e}^{tX} = X\mathrm{e}^{tX} = \mathrm{e}^{tX}X$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$*.*

(i) $\det(\mathrm{e}^X) = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}(X)}$

Démonstration 2.6 Cf. Exr. 11 □

Par la suite, nous allons discuter quelques méthodes qui peuvent servir à explicitement calculer l'exponentielle matricielle. Nous rappelons que $X \in \mathrm{Mat}(d, \mathbb{C})$ s'appelle **nilpotent** s'il existe $M \in \mathbb{N}^*$ t.q. $X^M = 0$.

Proposition 2.7

(a) *Soit* $X \in \mathrm{Mat}(d, \mathbb{C})$ *diagonalisable. Alors, il existe* $C \in \mathrm{GL}(d, \mathbb{C})$ *et* $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{C}$ *t.q.*

$$\mathrm{e}^X = C\mathrm{diag}[\mathrm{e}^{\lambda_1}, \ldots, \mathrm{e}^{\lambda_d}]C^{-1}.$$

(b) *Soit* $X \in \mathrm{Mat}(d, \mathbb{C})$ *nilpotent. Alors, il existe* $M \in \mathbb{N}^*$ *t.q.*

$$\mathrm{e}^X = \sum_{n=0}^{M} \frac{X^n}{n!}.$$

(c) Soit $X \in \mathrm{Mat}(d,\mathbb{C})$. Alors, il existe $S, N \in \mathrm{Mat}(d,\mathbb{C})$, où S est diagonalisable et N est nilpotent t.q.

$$\mathrm{e}^X = \mathrm{e}^S \mathrm{e}^N,$$

et les deux facteurs à droite se calculent à l'aide de (a) et (b).

Démonstration 2.7

(a) D'après Rap. 2.46, il existe $C \in \mathrm{GL}(d,\mathbb{C})$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{C}$ t.q. $X = C\mathrm{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_d]C^{-1}$. Alors, en appliquant Prop. 2.6 *(f)*, on arrive à la conclusion.

(b) Si X est nilpotent, la série infinie qui définit l'exponentielle matricielle se réduit à une somme finie.

(c) D'après Rap. 2.47 et Prop. 2.6 *(e)*, on peut écrire $\mathrm{e}^X = \mathrm{e}^{S+N} = \mathrm{e}^S \mathrm{e}^N$ car $[S,N] = 0$.

□

Exemple 2.8 *Soit $X = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}(2,\mathbb{C})$. Alors, on a $\mathrm{e}^X = \mathrm{e}^a \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.*

Démonstration 2.8 Nous écrivons $X = S + N$, où

$$S := \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}, \quad N := \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Alors, comme S est diagonalisable, N est nilpotent et $[S,N] = 0$, on obtient

$$\mathrm{e}^X = \mathrm{e}^{S+N} = \mathrm{e}^S \mathrm{e}^N = \mathrm{e}^a(1 + N) = \mathrm{e}^a \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

□

La fonction matricielle suivante jouera également un rôle important.

Définition 2.9 *Soit $B_1(1) := \{X \in \mathrm{Mat}(d,\mathbb{C}) \mid \|X - 1\| < 1\}$. L'application $\log : B_1(1) \to \mathrm{Mat}(d,\mathbb{C})$, définie, pour tout $X \in B_1(1)$, par*

$$\boxed{\log(X) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (X - 1)^n,}$$

s'appelle le **logarithme matriciel***.*

Proposition 2.10 *Soit $\mathrm{Mat}(d,\mathbb{C})$ muni de la norme de Hilbert-Schmidt. Alors, le logarithme matriciel a les propriétés suivantes :*

(a) Sa série entière matricielle est absolument convergente.

(b) Il est continu.

(c) Soit $X \in B_1(1)$*. Alors, nous avons*

$$\mathrm{e}^{\log(X)} = X.$$

(d) Soit $X \in \mathrm{Mat}(d, \mathbb{C})$ *avec* $\|X\| < \ln 2$*. Alors, nous avons*

$$\log(\mathrm{e}^X) = X.$$

(e) Soit $X \in \mathrm{Mat}(d, \mathbb{C})$ *avec* $\|X\| < \frac{1}{2}$*. Alors, nous avons (*$\mathcal{O}$ *est le symbole de Landau)*

$$\log(1 + X) = X + \mathcal{O}(\|X\|^2).$$

Démonstration 2.10

(a) En procédant comme dans Dém. 2.6 *(a)* et en utilisant que le rayon de convergence de la série complexe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (z-1)^n$$

est égal à 1, nous arrivons à l'énoncé.

(b) Soient $X, Y \in B_1(1)$. Alors, en procédant comme dans Dém. 2.4 *(b)* et en utilisant le produit de Cauchy, on peut faire l'estimation

$$\|\log(X) - \log(Y)\| \leq \frac{\|X - Y\|}{(1 - \|X - 1\|)(1 - \|Y - 1\|)}.$$

(c) Nous pourrions démontrer cet énoncé en composant deux séries entières mais nous allons procéder d'une manière plus algébrique comme suit :

Cas 1 : X est diagonalisable.

D'après Rap. 2.46, il existe $C \in \mathrm{GL}(d, \mathbb{C})$ t.q. $X = C\mathrm{diag}[\lambda_1, \ldots, \lambda_d]C^{-1}$, où $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{C}$ sont les valeurs propres de X. Alors, on a

$$(X-1)^n = (C(\mathrm{diag}[\lambda_1, \ldots, \lambda_d] - 1)C^{-1})^n = C\mathrm{diag}[(\lambda_1 - 1)^n, \ldots, (\lambda_d - 1)^n]C^{-1}.$$

Comme $|\lambda| \leq \|X\|$ pour toute valeur propre λ de X (cf. Rap. 1.48 et Exr. 12), on a $|\lambda_i - 1| \leq \|X - 1\| < 1$ pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$. Alors, on obtient

$$\begin{aligned} \log(X) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (X-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} C\mathrm{diag}[(\lambda_1 - 1)^n, \ldots, (\lambda_d - 1)^n]C^{-1} \\ &= C\mathrm{diag}[\mathrm{Log}(\lambda_1), \ldots, \mathrm{Log}(\lambda_d)]C^{-1}, \end{aligned}$$

où la fonction Log est la branche principale du logarithme (cf. Rap. 2.48). En utilisant Prop. 2.6 *(f)*, il en résulte que

$$\mathrm{e}^{\log(X)} = C\mathrm{e}^{\mathrm{diag}[\mathrm{Log}(\lambda_1), \ldots, \mathrm{Log}(\lambda_d)]}C^{-1} = C\mathrm{diag}\big[\underbrace{\mathrm{e}^{\mathrm{Log}(\lambda_1)}}_{=\lambda_1}, \ldots, \underbrace{\mathrm{e}^{\mathrm{Log}(\lambda_d)}}_{=\lambda_d}\big]C^{-1} = X.$$

Cas 2 : X n'est pas diagonalisable.
Comme pour tout $X \in \mathrm{Mat}(d, \mathbb{C})$, il existe une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de matrices diagonalisables dans $\mathrm{Mat}(d, \mathbb{C})$ t.q. $X_n \to X$ (cf. Exr. 13), on a, si n est suffisamment grand,

$$\|X_n - 1\| = \|X_n - X + X - 1\| \leq \|X - 1\| + \|X_n - X\| < 1.$$

Alors, X_n est dans le domaine de définition $B_1(1)$ du logarithme matriciel (si n est suffisamment grand) et, d'après *Cas 1*, on a $\mathrm{e}^{\log(X_n)} = X_n$, d'où $\mathrm{e}^{\log(X)} = X$ grâce à la continuité de l'exponentielle maticielle et du logarithme matricel.

(d) Soit $X \in \mathrm{Mat}(d, \mathbb{C})$ avec $\|X\| < \ln 2$. Alors, on a

$$\|\mathrm{e}^X - 1\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|X\|^n}{n!} = \mathrm{e}^{\|X\|} - 1 < 1.$$

Ensuite, pour démontrer $\log(\mathrm{e}^X) = X$ pour tout $X \in \mathrm{Mat}(d, \mathbb{C})$ avec $\|X\| < \ln 2$, on procède comme dans *(c)*.

(e) Soit $X \in \mathrm{Mat}(d, \mathbb{C})$ avec $\|X\| < \frac{1}{2}$. Alors, on a $1 + X \in B_1(1)$ et on peut écrire

$$\log(1 + X) - X = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} X^n = X^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} X^{n-2}.$$

En plus, nous pouvons estimer le terme à droite comme

$$\Big\| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} X^{n-2} \Big\| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \|X\|^{n-2} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n 2^{n-2}} < \infty.$$

□

Nous rappelons qu'en général (mais cf. Prop. 2.6 *(e)*), on a

$$\mathrm{e}^{X+Y} \neq \mathrm{e}^X \mathrm{e}^Y.$$

La proposition suivante contient une formule célèbre qui permet d'obtenir e^{X+Y} à partir d'un produit d'exponentielles matricielles et sera d'une grande utilité plus tard.

Proposition 2.11 *Pour tout* $X, Y \in \mathrm{Mat}(d, \mathbb{C})$*, on a la* **formule du produit de Lie-Trotter***,*

$$\boxed{\left(\mathrm{e}^{\frac{X}{n}} \mathrm{e}^{\frac{Y}{n}}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{X+Y}.}$$

Démonstration 2.11 Soit $X \in \mathrm{Mat}(d, \mathbb{C})$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Dans la décomposition

$$\mathrm{e}^{\frac{X}{n}} = 1 + \frac{X}{n} + \underbrace{\sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{i!} \frac{X^i}{n^i}}_{=: R_n(X)},$$

le dernier terme peut s'estimer comme

$$\|R_n(X)\| \leq \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\|X\|^i}{i!} \underbrace{\frac{1}{n^i}}_{\leq \frac{1}{n^2}} \leq \frac{1}{n^2} \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\|X\|^i}{i!} \leq \frac{1}{n^2} \mathrm{e}^{\|X\|},$$

c.-à-d., $R_n(X) = \mathcal{O}(n^{-2})$ pour $n \to \infty$. Alors, pour tout $X, Y \in \mathrm{Mat}(d, \mathbb{C})$, on obtient

$$\mathrm{e}^{\frac{X}{n}} \mathrm{e}^{\frac{Y}{n}} = \Big(1 + \frac{X}{n} + \mathcal{O}(n^{-2})\Big)\Big(1 + \frac{Y}{n} + \mathcal{O}(n^{-2})\Big) = 1 + \frac{X+Y}{n} + \mathcal{O}(n^{-2}),$$

ce qui implique que $\mathrm{e}^{\frac{X}{n}} \mathrm{e}^{\frac{Y}{n}} - 1 = \mathcal{O}(n^{-1})$, c.-à-d., pour n suffisamment grand, on a $\mathrm{e}^{\frac{X}{n}} \mathrm{e}^{\frac{Y}{n}} \in B_1(1)$. Alors, en utilisant Prop. 2.10 *(c)*, on peut écrire

$$\mathrm{e}^{\frac{X}{n}} \mathrm{e}^{\frac{Y}{n}} = \mathrm{e}^{Z_n},$$

où $Z_n := \log(\mathrm{e}^{\frac{X}{n}} \mathrm{e}^{\frac{Y}{n}})$. D'après Prop. 2.10 *(e)*, on a, pour n suffisamment grand,

$$Z_n = \log(1 + [\mathrm{e}^{\frac{X}{n}} \mathrm{e}^{\frac{Y}{n}} - 1]) = \mathrm{e}^{\frac{X}{n}} \mathrm{e}^{\frac{Y}{n}} - 1 + \mathcal{O}(n^{-2}) = \frac{X+Y}{n} + \mathcal{O}(n^{-2}).$$

Comme l'exponentielle matricielle est continue, il en résulte que

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\mathrm{e}^{\frac{X}{n}} \mathrm{e}^{\frac{Y}{n}}\Big)^n = \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{nZ_n} = \mathrm{e}^{X+Y}.$$

□

Finalement, nous allons avoir besoin de la notion suivante.

Définition 2.12 *Une application $A : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}(d, \mathbb{C})$ est un* **sous-groupe à un paramètre** *de $\mathrm{GL}(d, \mathbb{C})$ si elle a les propriétés suivantes :*
(SGP1) A est continu.
(SGP2) $A(0) = 1$
(SGP3) $A(t + s) = A(t)A(s)$ pour tout $s, t \in \mathbb{R}$

On peut montrer la proposition suivante.

Proposition 2.13 *Soit $A : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}(d, \mathbb{C})$ un sous-groupe à un paramètre de $\mathrm{GL}(d, \mathbb{C})$. Alors, il existe un unique $X \in \mathrm{Mat}(d, \mathbb{C})$ t.q., pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a*

$$A(t) = \mathrm{e}^{tX}.$$

La matrice X s'appelle le **générateur** *de A.*

Remarque 2.14 *Prop. 2.13 nous dit en particulier que $A(t)$ est automatiquement dérivable. Pour le démontrer, nous remarquons que*

$$A(t)R(s) = R(t + s) - R(t),$$

où $R(t) := \int_0^t \mathrm{d}u\, A(u)$, et que $R(s)$ est inversible si $|s|$ est suffisamment petit.

2.2 Algèbres de Lie

L'algèbre de Lie d'un GLM contient beaucoup d'information concernant le GLM. Comme l'algèbre de Lie est un objet plus simple que le GLM (comme nous allons le voir), beaucoup de questions concernant les GLM se réduisent à des questions plus simples concernant leurs algèbres de Lie.

Définition 2.15 *Soit G un GLM dans $\mathrm{GL}(d,\mathbb{C})$. L'ensemble $\mathrm{Lie}(G)$, défini par*

$$\boxed{\mathrm{Lie}(G) := \{X \in \mathrm{Mat}(d,\mathbb{C}) \,|\, \mathrm{e}^{tX} \in G \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}\},}$$

*s'appelle l'***algèbre de Lie du GLM** *G. Nous notons $\mathrm{gl}(d,\mathbb{C})$, $\mathrm{sl}(d,\mathbb{C})$, etc. les algèbres de Lie $\mathrm{Lie}(\mathrm{GL}(d,\mathbb{C}))$, $\mathrm{Lie}(\mathrm{SL}(d,\mathbb{C}))$, etc. .*

L'algèbre de Lie d'un GLM a les propriétés élémentaires suivantes.

Proposition 2.16 *Soit G un GLM et $X \in \mathrm{Lie}(G)$. Alors :*

(a) $\mathrm{e}^X \in G_e$

(b) $AXA^{-1} \in \mathrm{Lie}(G)$ *pour tout* $A \in G$

Démonstration 2.16 Cf. Exr. 15 □

Nous allons calculer les algèbres de Lie des 15 groupes classiques introduits dans le chapitre précédent. Elles ont les formes suivantes.

Proposition 2.17

(a) $\mathrm{gl}(d,\mathbb{C}) = \mathrm{Mat}(d,\mathbb{C})$

(b) $\mathrm{gl}(d,\mathbb{R}) = \mathrm{Mat}(d,\mathbb{R})$

(c) $\mathrm{sl}(d,\mathbb{C}) = \{X \in \mathrm{Mat}(d,\mathbb{C}) \,|\, \mathrm{tr}(X) = 0\}$

(d) $\mathrm{sl}(d,\mathbb{R}) = \{X \in \mathrm{Mat}(d,\mathbb{R}) \,|\, \mathrm{tr}(X) = 0\}$

(e) $\mathrm{u}(d) = \{X \in \mathrm{Mat}(d,\mathbb{C}) \,|\, X^* = -X\}$

(f) $\mathrm{su}(d) = \{X \in \mathrm{Mat}(d,\mathbb{C}) \,|\, X^* = -X,\ \mathrm{tr}(X) = 0\}$

(g) $\mathrm{o}(d) = \mathrm{so}(d) = \{X \in \mathrm{Mat}(d,\mathbb{R}) \,|\, X^T = -X\}$

(h) $\mathrm{o}(d,\mathbb{C}) = \mathrm{so}(d,\mathbb{C}) = \{X \in \mathrm{Mat}(d,\mathbb{C}) \,|\, X^T = -X\}$

(i) $\mathrm{o}(p,q) = \mathrm{so}(p,q) = \{X \in \mathrm{Mat}(p+q,\mathbb{R}) \,|\, gX^Tg = -X\}$

(j) $\mathrm{sp}(d,\mathbb{C}) = \{X \in \mathrm{Mat}(2d,\mathbb{C}) \,|\, JX^TJ = X\}$

(k) $\mathrm{sp}(d,\mathbb{R}) = \{X \in \mathrm{Mat}(2d,\mathbb{R}) \,|\, JX^TJ = X\}$

(l) $\mathrm{sp}(d) = \mathrm{sp}(d,\mathbb{C}) \cap \mathrm{u}(2d)$

Démonstration 2.17

(a) $\subseteq$: Clair
$\supseteq$: Soit $X \in \mathrm{Mat}(d, \mathbb{C})$. Alors, d'après Prop. 2.6 *(c)*, $\mathrm{e}^{tX} \in \mathrm{GL}(d, \mathbb{C})$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(b) $\subseteq$: Soit $X \in \mathrm{gl}(d, \mathbb{R})$. Alors, on a $\mathrm{e}^{tX} \in \mathrm{GL}(d, \mathbb{R})$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, d'où on obtient

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \mathrm{e}^{tX}}_{\in \mathrm{Mat}(d,\mathbb{R})} = X.$$

$\supseteq$: Soit $X \in \mathrm{Mat}(d, \mathbb{R})$. Alors, d'après Prop. 2.6 *(c)*, on a $\mathrm{e}^{tX} \in \mathrm{GL}(d, \mathbb{R})$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(c) $\subseteq$: Soit $X \in \mathrm{sl}(d, \mathbb{C})$. Alors, comme, d'après Prop. 2.6 *(i)*, on a $\det(\mathrm{e}^{tX}) = \mathrm{e}^{t\,\mathrm{tr}(X)} = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, on obtient

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \mathrm{e}^{t\,\mathrm{tr}(X)} = \mathrm{tr}(X).$$

$\supseteq$: Soit $X \in \mathrm{Mat}(d, \mathbb{C})$ t.q. $\mathrm{tr}(X) = 0$. Alors, d'après Prop. 2.6 *(i)*, on a $\det(\mathrm{e}^{tX}) = \mathrm{e}^{t\,\mathrm{tr}(X)} = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(d) Comme pour *(b)* et *(c)*.

Pour les cas *(e)* – *(g)*, cf. Exr. 16. Les cas restants sont laissés en exercices au lecteur. □

Les propriétés suivantes d'une algèbre de Lie d'un GLM sont fondamentales.

Proposition 2.18 *Soit G un GLM et $X, Y \in \mathrm{Lie}(G)$. Alors :*

(a) $tX \in \mathrm{Lie}(G)$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$

(b) $X + Y \in \mathrm{Lie}(G)$

(c) $[X, Y] \in \mathrm{Lie}(G)$

Remarque 2.19

(a) Les propriétés (a) et (b) de Prop. 2.18 impliquent que $\mathrm{Lie}(G)$ est un espace vectoriel réel (c.-à-d., un sous-espace vectoriel réel de $\mathrm{Mat}(d, \mathbb{C})$). Il est important de noter que, bien que les éléments de G puissent avoir des entrées complexes, $\mathrm{Lie}(G)$ n'est pas un espace vectoriel complexe en général.

Exemple : Soit $X \in \mathrm{su}(d)$ et supposons que $\mathrm{i}X \in \mathrm{su}(d)$. Alors, d'une part, on a $(\mathrm{i}X)^* = -\mathrm{i}X^* = \mathrm{i}X$ et, d'autre part, $(\mathrm{i}X)^* = -\mathrm{i}X$ (par hypothèse), d'où $X = 0$.

(b) La propriété (c) de Prop. 2.18 signifie que $\mathrm{Lie}(G)$ est une algèbre de Lie dans le sens abstrait que nous allons introduire ci-dessous (cf. section 2.3).

Démonstration 2.18

(a) On a $tX \in \mathrm{Lie}(G)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ parce que $\mathrm{e}^{s(tX)} = \mathrm{e}^{(st)X} \in G$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.

(b) Si $[X,Y]=0$, alors, d'après Prop. 2.6 *(e)*, on a $\mathrm{e}^{X+Y}=\mathrm{e}^X\mathrm{e}^Y\in G$.
Si $[X,Y]\neq 0$, nous pouvons utiliser la formule du produit de Lie-Trotter (cf. Prop. 2.11), c.-à-d., pour tout $t\in\mathbb{R}$, on a

$$\mathrm{e}^{t(X+Y)}=\lim_{n\to\infty}\underbrace{\left(\mathrm{e}^{t\frac{X}{n}}\mathrm{e}^{t\frac{Y}{n}}\right)^n}_{\in G}.$$

Comme G est un GLM, la limite est dans G ou elle n'est pas inversible (cf. Déf. 1.6). On trouve alors que la limite est dans G parce qu'elle est égale à $\mathrm{e}^{t(X+Y)}$ qui est inversible.

(c) Soit $Z:\mathbb{R}\to\mathrm{Lie}(G)$ défini, pour tout $t\in\mathbb{R}$, par

$$Z(t):=\mathrm{e}^{tX}Y\mathrm{e}^{-tX}.$$

D'après Prop. 2.16 *(b)*, cette application est bien définie (c.-à-d., $Z(t)\in\mathrm{Lie}(G)$ pour tout $t\in\mathbb{R}$). En plus, d'après Prop. 2.6 *(h)*, elle est dérivable et on a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}Z(t)=[X,Y].$$

Comme $\mathrm{Lie}(G)$ est un espace vectoriel réel de dimension finie, $\mathrm{Lie}(G)$ est fermé. Il en résulte que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0}Z(t)=\lim_{t\to 0}(Z(t)-Z(0))/t\in\mathrm{Lie}(G)$.

$\square$

Nous faisons alors la définition suivante.

Définition 2.20 *Soient G et H des GLM et $\mathrm{Lie}(G)$ et $\mathrm{Lie}(H)$ leurs algèbres de Lie. Un* **homomorphisme d'algèbres de Lie (HAL)** *est une application linéaire réelle $\varphi:\mathrm{Lie}(G)\to\mathrm{Lie}(H)$ ayant la propriété suivante (pour tout $X,Y\in\mathrm{Lie}(G)$) :*

(HAL) $\varphi([X,Y])=[\varphi(X),\varphi(Y)]$

Un **isomorphisme d'algèbres de Lie (IAL)** *est un HAL bijectif, et on note* $\boxed{\mathrm{Lie}(G)\cong\mathrm{Lie}(H)}$.

A présent, nous arrivons au premier des théorèmes principaux de ce cours.

Théorème 2.21 *Soient G et H des GLM et soit $\Phi:G\to H$ un HGL. Alors, il existe une unique application linéaire réelle $\varphi:\mathrm{Lie}(G)\to\mathrm{Lie}(H)$ t.q., pour tout $X\in\mathrm{Lie}(G)$, on a*

$$\Phi(\mathrm{e}^X)=\mathrm{e}^{\varphi(X)}. \tag{2}$$

En outre, pour tout $A\in G$ et tout $X,Y\in\mathrm{Lie}(G)$, cette application a les propriétés suivantes :

(a) $\varphi(AXA^{-1})=\Phi(A)\varphi(X)\Phi(A)^{-1}$

(b) $\varphi([X,Y])=[\varphi(X),\varphi(Y)]$

(c) $\varphi(X)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0}\Phi(\mathrm{e}^{tX})$

L'application linéaire φ s'appelle le **HAL associé au HGL** Φ.

Démonstration 2.21 Soit $X \in \mathrm{Lie}(G)$ fixé et soit l'application $A : \mathbb{R} \to H$ définie, pour tout $t \in \mathbb{R}$, par

$$A(t) := \Phi(\mathrm{e}^{tX}).$$

Alors, A est un sous-groupe à un paramètre de H (cf. Déf. 2.12) :
(SGP1) A est continu parce que Φ est continu.
(SGP2) $A(0) = \Phi(1) = 1$ (ce qui est une conséquence de Déf. 1.34 : $\Phi(1)\Phi(A) = \Phi(1A) = \Phi(A)$ implique $\Phi(1) = \Phi(A)\Phi(A)^{-1} = 1$)
(SGP3) $A(t)A(s) = \Phi(\mathrm{e}^{tX})\Phi(\mathrm{e}^{sX}) = \Phi(\mathrm{e}^{tX}\mathrm{e}^{sX}) = \Phi(\mathrm{e}^{(t+s)X}) = A(t+s)$ pour tout $t, s \in \mathbb{R}$
Alors, d'après Prop. 2.13, il existe une unique matrice Z t.q., pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$A(t) = \Phi(\mathrm{e}^{tX}) = \mathrm{e}^{tZ}.$$

Comme $\mathrm{e}^{tZ} \in H$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $Z \in \mathrm{Lie}(H)$. On définit alors $\varphi : \mathrm{Lie}(G) \to \mathrm{Lie}(H)$ par

$$\varphi(X) := Z = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \mathrm{e}^{tZ} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \Phi(\mathrm{e}^{tX}),$$

d'où on trouve que $\Phi(\mathrm{e}^{X}) = \mathrm{e}^{Z} = \mathrm{e}^{\varphi(X)}$. En plus, φ est une application linéaire réelle parce que, d'une part, elle est homogène (réelle), c.-à-d., pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\varphi(\lambda X) = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0} \mathrm{e}^{t\lambda Z} = \lambda Z = \lambda\varphi(X).$$

D'autre part, elle est également additive, c.-à-d., pour tout $X, Y \in \mathrm{Lie}(G)$, on a

$$\begin{aligned}\Phi\left(\mathrm{e}^{t(X+Y)}\right) &= \Phi\left(\lim_{n\to\infty}\left[\mathrm{e}^{t\frac{X}{n}}\mathrm{e}^{t\frac{Y}{n}}\right]^n\right) = \lim_{n\to\infty}\Phi\left(\left[\mathrm{e}^{t\frac{X}{n}}\mathrm{e}^{t\frac{Y}{n}}\right]^n\right) = \lim_{n\to\infty}\left[\Phi\left(\mathrm{e}^{t\frac{X}{n}}\right)\Phi\left(\mathrm{e}^{t\frac{Y}{n}}\right)\right]^n \\ &= \lim_{n\to\infty}\left[\mathrm{e}^{t\frac{\varphi(X)}{n}}\mathrm{e}^{t\frac{\varphi(Y)}{n}}\right]^n = \mathrm{e}^{t(\varphi(X)+\varphi(Y))},\end{aligned}$$

où nous avons deux fois utilisé la formule du produit de Lie-Trotter. Alors, on obtient

$$\varphi(X+Y) = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0}\Phi(\mathrm{e}^{t(X+Y)}) = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0}\mathrm{e}^{t(\varphi(X)+\varphi(Y))} = \varphi(X) + \varphi(Y).$$

A présent, nous allons démontrer les propriétés *(a) – (c)* :

(a) Comme

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{t\varphi(AXA^{-1})} &= \mathrm{e}^{\varphi(tAXA^{-1})} = \Phi(\mathrm{e}^{tAXA^{-1}}) = \Phi(A\mathrm{e}^{tX}A^{-1}) = \Phi(A)\Phi(\mathrm{e}^{tX})\Phi(A^{-1}) \\ &= \Phi(A)\mathrm{e}^{t\varphi(X)}\Phi(A)^{-1},\end{aligned}$$

on obtient *(a)* en dérivant cette équation p.r. à t au point $t = 0$.

(b) La propriété *(b)* est vraie parce que

$$\begin{aligned}\varphi([X,Y]) &= \varphi\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}\mathrm{e}^{tX}Y\mathrm{e}^{-tX}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}\varphi(\mathrm{e}^{tX}Y\mathrm{e}^{-tX}) \overset{(a)}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}\Phi(\mathrm{e}^{tX})\varphi(Y)\Phi(\mathrm{e}^{-tX}) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}\mathrm{e}^{t\varphi(X)}\varphi(Y)\mathrm{e}^{-t\varphi(X)} = [\varphi(X), \varphi(Y)].\end{aligned}$$

(c) Par construction

Il nous reste à motrer que φ est unique. Pour ce faire, supposons qu'il existe une application linéaire réelle $\psi : \mathrm{Lie}(G) \to \mathrm{Lie}(H)$ t.q. $\Phi(\mathrm{e}^X) = \mathrm{e}^{\psi(X)}$ pour tout $X \in \mathrm{Lie}(G)$. Alors, pour tout $X \in \mathrm{Lie}(G)$, on a

$$\varphi(X) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \Phi(\mathrm{e}^{tX}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \mathrm{e}^{t\psi(X)} = \psi(X).$$

□

Nous obtenons le corollaire suivant.

Proposition 2.22 *Soient G et H des GLM et soit $\Phi : G \to H$ un IGL. Alors, le HAL associé φ est un IAL, c.-à-d., on peut écrire que*

$$\boxed{G \cong H \implies \mathrm{Lie}(G) \cong \mathrm{Lie}(H).}$$

Démonstration 2.22 On va montrer que le HAL φ associé à Φ de Thm. 2.21 est bijectif.

φ est injectif :

Soit $X \in \mathrm{Lie}(G)$ t.q. $\varphi(X) = 0$ (comme φ est linéaire, $\varphi(X) = \varphi(Y)$ se réduit à $\varphi(X-Y) = 0$). Alors, on a $\Phi(\mathrm{e}^{tX}) = \mathrm{e}^{t\varphi(X)} = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Comme, par hypothèse, Φ est bijectif (nous notons sa réciproque Φ^{-1}), on obtient $\mathrm{e}^{tX} = \Phi^{-1}(1) = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ (la réciproque d'un isomorphisme de groupes est un homomorphisme de groupes). En dérivant cette équation p.r. à t au point $t = 0$, on trouve $X = 0$.

φ est surjectif :

Soit $Y \in \mathrm{Lie}(H)$. Alors, $\mathrm{e}^{tY} \in H$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $\Phi^{-1}(\mathrm{e}^{tY})$ est un sous-groupe à un paramètre de G (cf. Dém. 2.21). En notant $Z := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0} \Phi^{-1}(\mathrm{e}^{tY})$, on a, d'après Prop. 2.13, que $\Phi^{-1}(\mathrm{e}^{tY}) = \mathrm{e}^{tZ} \in G$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et donc $Z \in \mathrm{Lie}(G)$. Il en résulte que

$$Y = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \mathrm{e}^{tY} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \Phi(\mathrm{e}^{tZ}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \mathrm{e}^{t\varphi(Z)} = \varphi(Z).$$

□

Remarque 2.23 *Pour un espace vectoriel $\mathcal{V}$ sur $\mathbb{K}$ avec $d := \dim(\mathcal{V}) < \infty$, on notera respectivement*

$$\mathrm{gl}(\mathcal{V}), \quad \mathrm{GL}(\mathcal{V}),$$

l'espace vectoriel de toutes les applications linéaires sur $\mathcal{V}$ et le groupe de toutes les applications linéaires inversibles sur $\mathcal{V}$. On identifiera $\mathrm{GL}(\mathcal{V})$ avec $\mathrm{GL}(d, \mathbb{C})$ et $\mathrm{gl}(\mathcal{V})$ avec $\mathrm{gl}(d, \mathbb{C})$ en utilisant l'isomorphisme d'espaces vectoriels $\mathcal{V} \to \mathbb{C}^d$ usuel (qui envoie une base de $\mathcal{V}$ sur une base de $\mathbb{K}^d$).

Définition 2.24 *Soit G un GLM. L'***application adjointe** $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{GL}(\mathrm{Lie}(G))$*, notée* $\mathrm{Ad}_A := \mathrm{Ad}(A)$ *pour tout* $A \in G$*, est définie, pour tout* $X \in \mathrm{Lie}(G)$*, par*

$$\boxed{\mathrm{Ad}_A(X) := AXA^{-1}.}$$

*L'***application adjointe** $\mathrm{ad} : \mathrm{Lie}(G) \to \mathrm{gl}(\mathrm{Lie}(G))$*, notée* $\mathrm{ad}_X := \mathrm{ad}(X)$ *pour tout* $X \in \mathrm{Lie}(G)$*, est définie, pour tout* $Y \in \mathrm{Lie}(G)$*, par*

$$\boxed{\mathrm{ad}_X(Y) := [X, Y].}$$

Les applications adjointes ont les propriétés suivantes.

Proposition 2.25

(a) L'application Ad *est un HGL.*

(b) Pour tout $A \in G$ *et tout* $X, Y \in \mathrm{Lie}(G)$*, on a*

$$\mathrm{Ad}_A(\mathrm{ad}_X(Y)) = \mathrm{ad}_{\mathrm{Ad}_A(X)}(\mathrm{Ad}_A(Y)).$$

(c) L'application ad *est le HAL associé au HGL* Ad*, c.-à-d., pour tout* $X, Y \in \mathrm{Lie}(G)$*, on a*

$$\mathrm{Ad}_{\mathrm{e}^X}(Y) = \mathrm{e}^{\mathrm{ad}_X}(Y).$$

(d) Soit $\mathrm{ad}_X^0(Y) := Y$ *pour tout* $X, Y \in \mathrm{Mat}(d, \mathbb{C})$*. Alors, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*, on a*

$$\mathrm{ad}_X^n(Y) := \underbrace{[X, \ldots, [X, [X, Y]] \ldots]}_{n \text{ commutateurs}} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{n-i}\, X^i Y X^{n-i}.$$

Démonstration 2.25

(a) Soient $A, B \in G$ et $X \in \mathrm{Lie}(G)$. Nous notons d'abord que Ad est bien défini parce que, d'une part, d'après Prop. 2.16 *(b)*, on a $\mathrm{Ad}_A(X) \in \mathrm{Lie}(G)$. D'autre part, Ad_A est inversible avec réciproque $\mathrm{Ad}_{A^{-1}}$ parce que

$$\mathrm{Ad}_A(\mathrm{Ad}_{A^{-1}}(X)) = A\mathrm{Ad}_{A^{-1}}(X)A^{-1} = A(A^{-1}XA)A^{-1} = X.$$

Ensuite, Ad est un homomorphisme de groupes parce que

$$\mathrm{Ad}_{AB}(X) = ABXB^{-1}A^{-1} = \mathrm{Ad}_A(\mathrm{Ad}_B(X)).$$

Finalement, Ad est continue parce que

$$\mathrm{Ad}_A(X) - \mathrm{Ad}_B(X) = (A - B)XA^{-1} - BXA^{-1}(A - B)B^{-1}.$$

(b) Pour tout $A \in G$ et tout $X, Y \in \mathrm{Lie}(G)$, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}_A(\mathrm{ad}_X(Y)) &= A[X, Y]A^{-1} = AXYA^{-1} - AYXA^{-1} = AXA^{-1}AYA^{-1} - AYA^{-1}AXA^{-1}\\ &= \mathrm{Ad}_A(X)\mathrm{Ad}_A(Y) - \mathrm{Ad}_A(Y)\mathrm{Ad}_A(X) = [\mathrm{Ad}_A(X), \mathrm{Ad}_A(Y)]\\ &= \mathrm{ad}_{\mathrm{Ad}_A(X)}(\mathrm{Ad}_A(Y)).\end{aligned}$$

(c) D'abord, pour tout $X, Y, Z \in \mathrm{Lie}(G)$, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}_{[X,Y]}(Z) &= [[X,Y],Z] = [X,[Y,Z]] - [Y,[X,Z]] = \mathrm{ad}_X(\mathrm{ad}_Y(Z)) - \mathrm{ad}_Y(\mathrm{ad}_X(Z)) \\ &= [\mathrm{ad}_X, \mathrm{ad}_Y](Z),\end{aligned}$$

c.-à-d., ad est un HAL. En plus, d'après Thm. 2.21 *(c)*, le HAL associé au HGL Ad se calcule par

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \mathrm{Ad}_{\mathrm{e}^{tX}}(Y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \mathrm{e}^{tX} Y \mathrm{e}^{-tX} = [X,Y] = \mathrm{ad}_X(Y).$$

(d) Nous procédons par induction complète. Soient $X, Y \in \mathrm{Mat}(d, \mathbb{C})$.
Pour $n = 1$ *:*
$\mathrm{ad}_X(Y) = [X,Y] = \binom{1}{0}(-1)X^0 Y X + \binom{1}{1}(-1)^0 X Y X^0$
Pour $n \mapsto n+1$ *:*

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}_X^{n+1}(Y) = [X, \mathrm{ad}_X^n(Y)] &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{n-i} [X, X^i Y X^{n-i}] \\ &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{n-i} X^{i+1} Y X^{n-i} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{n+1-i} X^i Y X^{n+1-i} \\ &= (-1)^{n+1} Y X^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left[\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i}\right]}_{=\binom{n+1}{i}} (-1)^{n+1-i} X^i Y X^{n+1-i} + X^{n+1} Y \\ &= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} (-1)^{n+1-i} X^i Y X^{n+1-i}.\end{aligned}$$

□

En raison de son importance, l'exponentielle matricielle restreinte à l'algèbre de Lie d'un GLM donné sera notée de la manière suivante.

Définition 2.26 *Soit G un GLM. L'***application exponentielle***,*

$$\exp_G : \mathrm{Lie}(G) \to G,$$

est définie, pour tout $X \in \mathrm{Lie}(G)$, par $\exp_G(X) := \mathrm{e}^X$. S'il n'y a pas de confusion possible, on écrira souvent $\exp := \exp_G$.

D'après Exr. 18, l'application exponentielle n'est ni injecive ni surjective en général. Néanmoins, on peut montrer qu'elle est localement bijective dans le sens suivant.

Proposition 2.27 *Soit G un GLM. Alors, il existe un voisinage U de $0 \in \mathrm{Lie}(G)$ et un voisinage V de $1 \in G$ t.q. l'application exponentielle est un homéomorphisme (cf. Rap. 2.49) entre U et V.*

L'énoncé suivant et la manière de le démontrer seront utilisés plusieurs fois en cours de route.

Proposition 2.28 *Soit G un GLM <u>connexe</u>. Alors, pour tout $A \in G$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \ldots, X_N \in \mathrm{Lie}(G)$ t.q.*

$$\boxed{A = \prod_{i=1}^{N} \exp(X_i).}$$

Démonstration 2.28 Soit $A \in G$. Comme G est connexe, il existe $\Gamma \in C([0,1], G)$ avec $\Gamma(0) = 1$ et $\Gamma(1) = A$. Alors, pour toute partition finie $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = 1$ de l'interval $[0,1]$ avec $N \in \mathbb{N}^*$, l'élément A peut s'écrire comme

$$A = \prod_{i=1}^{N} \Gamma(t_{i-1})^{-1} \Gamma(t_i).$$

En plus, comme l'interval $[0,1]$ est compact et comme Γ est continu, le théorème de Heine implique que Γ est uniformément continu sur $[0,1]$ (cf. le cours d'analyse). Alors, il existe une partition finie $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = 1$ de l'interval $[0,1]$ avec $N \in \mathbb{N}^*$ t.q., pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$, on a

$$\Gamma(t_{i-1})^{-1}\Gamma(t_i) = 1 + \Gamma(t_{i-1})^{-1}[\Gamma(t_i) - \Gamma(t_{i-1})] \in V,$$

où V est le voisinage de $1 \in G$ de Prop. 2.27. En choisissant $X_1, \ldots, X_N \in \mathrm{Lie}(G)$ t.q. on a $\Gamma(t_{i-1})^{-1}\Gamma(t_i) = \exp(X_i)$ pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$ (d'après Prop. 2.27, $\exp$ est surjectif de U dans V), on arrive à la conclusion. $\square$

2.3 Algèbres de Lie abstraites

Dans cette section, nous allons introduire la notion abstraite d'une algèbre de Lie, c.-à-d., une algèbre de Lie qui n'est pas nécessairement donnée comme $\mathrm{Lie}(G)$ pour une GLM G.

Définition 2.29 *Une* **algèbre de Lie (AL)** *sur $\mathbb{K}$, notée $\mathfrak{g}$, est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie muni d'une application $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, appelée un* **crochet de Lie***, ayant les propriétés suivantes (pour tout $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$) :*
(AL1) $[\cdot, \cdot]$ *est bilinéaire.*
(AL2) $[X, Y] = -[Y, X]$
(AL3) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$
*La propriété (AL2) s'appelle l'***antisymétrie** *et (AL3) l'***identité de Jacobi***.*

Exemple 2.30

(a) Soit $\mathcal{A}$ une algèbre (cf. Rap. 2.41). Alors, l'application $[\,\cdot\,,\cdot\,] : \mathcal{A}\times\mathcal{A}\to\mathcal{A}$*, définie, pour tout* $A, B \in \mathcal{A}$*, par*

$$[A, B] := AB - BA,$$

est un crochet de Lie sur $\mathcal{A}$, dit le **commutateur** *(cf. Prop. 2.6 (e)).*

(b) $\mathrm{Mat}(d, \mathbb{K})$ *muni du commutateur est une AL sur* $\mathbb{K}$*.*

(c) $\mathbb{R}^3$ *muni du produit vectoriel est une AL réelle.*

Démonstration 2.30

(a) (AL1) et *(AL2)* Clair

(AL3) Nous calculons

$$\begin{aligned}[A,[B,C]] + [B,[C,A]] + [C,[A,B]] &= A(BC - CB) - (BC - CB)A \\ &\quad + B(CA - AC) - (CA - AC)B \\ &\quad + C(AB - BA) - (AB - BA)C \\ &= 0.\end{aligned}$$

(b) Comme, d'après Prop. 2.2 *(b)*, $\mathrm{Mat}(d, \mathbb{K})$ est une algèbre, on arrive à la conclusion en utilisant *(a)*.

(c) Ce calcul est laissé en exercice au lecteur.

□

Remarque 2.31

(a) On peut montrer que toute algèbre de Lie peut être plongée dans une algèbre (associative) t.q. le crochet de Lie correspond au commutateur.

(b) L'identité de Jacobi joue le rôle d'un substitut pour l'associativité de la multiplication sur l'algèbre donnée par le crochet de Lie.

Définition 2.32 *Soit $\mathfrak{g}$ une AL sur $\mathbb{K}$. Une* **sous-algèbre de Lie** *de $\mathfrak{g}$ est un sous-espace vectoriel $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ ayant la propriété suivante (pour tout $X, Y \in \mathfrak{h}$) :*

(SAL) $[X, Y] \in \mathfrak{h}$

Soient $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ des AL sur $\mathbb{K}$. Un **homomorphisme d'algèbres de Lie (HAL)** *de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{h}$ est une application $\mathbb{K}$-linéaire $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ ayant la propriété suivante (pour tout $X, Y \in \mathfrak{g}$) :*

(HAL) $\varphi([X, Y]) = [\varphi(X), \varphi(Y)]$

Si, de plus, φ est bijectif, alors φ s'appelle un **isomorphisme d'algèbres de Lie (IAL)***.*

Pour faire le lien avec les définitions de la section précédente, nous notons le fait suivant.

Proposition 2.33 *Soit G un GLM. Alors,* $\mathrm{Lie}(G)$ *est une AL réelle.*

Démonstration 2.33 Utiliser Prop. 2.18 et Ex. 2.30 *(b)*. $\square$

On peut également introduire une version abstraite de l'application adjointe pour les AL (cf. Déf. 2.24).

Définition 2.34 *Soit $\mathfrak{g}$ une AL. L'***application adjointe** $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{gl}(\mathfrak{g})$*, notée* $\mathrm{ad}_X := \mathrm{ad}(X)$ *pour tout $X \in \mathfrak{g}$, est définie, pour tout $Y \in \mathfrak{g}$, par*

$$\mathrm{ad}_X(X) := [X, Y].$$

Les scalaires suivants déterminent complètement le crochet de Lie.

Définition 2.35 *Soit $\mathfrak{g}$ une AL sur $\mathbb{K}$ avec $N := \dim(\mathfrak{g})$ et soit $\{E_i\}_{i=1}^N$ une base de l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$. Alors, pour tout $i, j \in \{1, \ldots, N\}$, on peut faire le développement*

$$[E_i, E_j] = \sum_{k=1}^{N} c_{ijk}\, E_k.$$

Les constantes $c_{ijk} \in \mathbb{K}$ pour $i, j, k \in \{1, \ldots, N\}$ s'appellent les **constantes de structure** *(p.r. à la base $\{E_i\}_{i=1}^N$).*

En outre, on introduit le concept suivant.

Définition 2.36 *Soient $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ des AL. La* **somme directe de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$***, notée $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$, est la somme directe des espaces vectoriels respectifs munie du crochet de Lie $[\,\cdot\,,\cdot\,] : \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h} \times \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h} \to \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ défini, pour tout $X_1, X_2 \in \mathfrak{g}$ et $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{h}$, par*

$$[(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)] := ([X_1, X_2], [Y_1, Y_2]).$$

2.4 Complexification

Définition 2.37 *Soit $\mathcal{V}$ un espace vectoriel réel. Le produit cartésien $\boxed{\mathcal{V}_{\mathbb{C}} := \mathcal{V} \times \mathcal{V}}$, muni d'une addition $\mathcal{V}_{\mathbb{C}} \times \mathcal{V}_{\mathbb{C}} \to \mathcal{V}_{\mathbb{C}}$ et d'une multiplication par un scalaire* <u>*complexe*</u> *$\mathbb{C} \times \mathcal{V}_{\mathbb{C}} \to \mathcal{V}_{\mathbb{C}}$, définies, pour tout $X, X_1, X_2, Y, Y_1, Y_2 \in \mathcal{V}$ et tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, par*

$$\begin{aligned}(X_1, Y_1) + (X_2, Y_2) &:= (X_1 + X_2, Y_1 + Y_2),\\ (\alpha + \mathrm{i}\beta)(X, Y) &:= (\alpha X - \beta Y, \beta X + \alpha Y),\end{aligned}$$

est un espace vectoriel complexe appelé la **compléxification (vectorielle)** *de $\mathcal{V}$. Par analogie avec les nombres complexes, les éléments de $\mathcal{V}_{\mathbb{C}}$ seront parfois notés*

$$X + \mathrm{i}Y := (X, Y).$$

Par le plongement $\mathcal{V} \to \mathcal{V}_{\mathbb{C}}$, défini par $X \mapsto (X, 0)$ ($\equiv X + \mathrm{i}0$) pour tout $X \in \mathcal{V}$, l'espace $\mathcal{V}$ sera identifié avec le sous-espace vectoriel réel $\mathcal{V} \times \{0\}$ de $\mathcal{V}_{\mathbb{C}}$.

On peut facilement montrer la proposition suivante.

Proposition 2.38 *Soit $\mathfrak{g}$ une AL réelle, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ sa complexification vectorielle et soit l'application $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \times \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \to \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ définie, pour tout $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{g}$, par*

$$[(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)] := ([X_1, X_2] - [Y_1, Y_2], [X_1, Y_2] + [Y_1, X_2]).$$

Muni de ce crochet, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ est une AL complexe appelée la **complexification (algébrique)** *de $\mathfrak{g}$. En outre, ce crochet est l'unique prolongement à $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ du crochet de $\mathfrak{g}$.*

Tout HAL peut également être prolongé à la complexification.

Proposition 2.39 *Soit $\mathfrak{g}$ une AL réelle, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ sa complexification, $\mathfrak{h}$ une AL complexe et $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ un HAL réel. Alors, l'application $\varphi_{\mathbb{C}} : \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \to \mathfrak{h}$, définie, pour tout $X, Y \in \mathfrak{g}$, par*

$$\varphi_{\mathbb{C}}(X, Y) := \varphi(X) + \mathrm{i}\varphi(Y),$$

est un HAL complexe. En outre, $\varphi_{\mathbb{C}}$ est l'unique prolongement à $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ de φ (la **propriété universelle** *de la complexification).*

Démonstration 2.39 Cf. Exr. 20 □

Finalement, on peut montrer les propriétés suivantes (pour $\mathrm{su}(d)$, cf. Exr. 21).

Proposition 2.40 *Les AL $\mathrm{gl}(d, \mathbb{C})$, $\mathrm{sl}(d, \mathbb{C})$, $\mathrm{so}(d, \mathbb{C})$ et $\mathrm{sp}(d, \mathbb{C})$ sont des AL complexes. En plus, on a les IAL suivants :*

Complexification	*IAL avec :*
$\mathrm{gl}(d, \mathbb{R})_{\mathbb{C}}$	$\mathrm{gl}(d, \mathbb{C})$
$\mathrm{u}(d)_{\mathbb{C}}$	$\mathrm{gl}(d, \mathbb{C})$
$\mathrm{su}(d)_{\mathbb{C}}$	$\mathrm{sl}(d, \mathbb{C})$
$\mathrm{sl}(d, \mathbb{R})_{\mathbb{C}}$	$\mathrm{sl}(d, \mathbb{C})$
$\mathrm{so}(d)_{\mathbb{C}}$	$\mathrm{so}(d, \mathbb{C})$
$\mathrm{sp}(d, \mathbb{R})_{\mathbb{C}}$	$\mathrm{sp}(d, \mathbb{C})$
$\mathrm{sp}(d)_{\mathbb{C}}$	$\mathrm{sp}(d, \mathbb{C})$

Rappels

Rappel 2.41 *Une* **algèbre** *$\mathcal{A}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (cf. Rap. 1.43) muni d'une* **multiplication** *$\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, notée $(A, B) \mapsto AB$, ayant les propriétés suivantes (pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et tout $A, B, C \in \mathcal{A}$) :*

(A1) $A(BC) = (AB)C$

(A2) $A(B + C) = AB + AC$ et $(A + B)C = AC + BC$

(A3) $\alpha\beta(AB) = (\alpha A)(\beta B)$

Une algèbre s'appelle **abélienne** *si $AB = BA$.*
Un sous-espace vectoriel $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ t.q. (A1) – (A3) sont satisfaits dans $\mathcal{B}$ s'appelle une **sous-algèbre** *de $\mathcal{A}$.*

Rappel 2.42 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre. Une* **norme d'algèbre** *est une application $\|\cdot\| : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$, notée $A \mapsto \|A\|$, ayant les propriétés suivantes (pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ et tout $A, B \in \mathcal{A}$) :*

(N1) $\|A\| \geq 0$

(N2) $\|A\| = 0$ *ssi* $A = 0$

(N3) $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$

(N4) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

(N5) $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ *(***sous-multiplicativité***)*

Nous rappelons qu'une **norme** *sur un espace vectoriel $\mathcal{V}$ (ou $\mathcal{V}$ n'est pas nécessairement une algèbre) est une application $\|\cdot\| : \mathcal{V} \to \mathbb{C}$, notée $u \mapsto \|u\|$, qui satisfait (N1) – (N4).*

Rappel 2.43 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre. Une* **involution** *de $\mathcal{A}$ est une application $^* : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, notée $A \mapsto A^*$, ayant les propriétés suivantes (pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et tout $A, B, C \in \mathcal{A}$) :*

(I1) $(A^*)^* = A$

(I2) $(AB)^* = B^*A^*$

(I3) $(\alpha A + \beta B)^* = \bar{\alpha}A^* + \bar{\beta}B^*$

Une algèbre munie d'une involution s'appelle une **algèbre involutive***.*

Rappel 2.44 *Une* **algèbre de Banach** *est une algèbre $\mathcal{A}$ munie d'une norme d'algèbre t.q. $\mathcal{A}$ est complet p.r. à cette norme. Une* **algèbre de Banach involutive** *est une algèbre de Banach $\mathcal{A}$ de norme d'algèbre $\|\cdot\|$ et munie d'une involution * t.q. (pour tout $A \in \mathcal{A}$) :*

(BI) $\|A^*\| = \|A\|$

Rappel 2.45 *Soit $\mathcal{V}$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ muni d'un produit scalaire $(\cdot\,,\,\cdot)$ et de la norme $\|\cdot\|$ induite par le produit scalaire (c.-à-d., définie par $\|x\| := \sqrt{(x,x)}$ pour tout $x \in \mathcal{V}$). Alors, $|(x,y)| \leq \|x\|\|y\|$ pour tout $x, y \in \mathcal{V}$. Cette inégalité s'appelle l'***inégalité de Cauchy-Schwarz** *.*

Rappel 2.46 *Soit $X \in \mathrm{Mat}(d, \mathbb{C})$ diagonalisable. Alors, il existe $C \in \mathrm{GL}(d, \mathbb{C})$ t.q. $X = C\mathrm{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_d]C^{-1}$, où $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ sont les valeurs propres de X.*

Rappel 2.47 *Soit $X \in \mathrm{Mat}(d, \mathbb{C})$. Alors, il existe des matrices uniques $S, N \in \mathrm{Mat}(d, \mathbb{C})$, où S est diagonalisable, N est nilpotent et $[S, N] = 0$, t.q. $X = S + N$ (cf. la* **réduction de Jordan***).*

Rappel 2.48 *Soit $\mathbb{C}^- := \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z) \leq 0$ et $\mathrm{Im}(z) = 0\}$. La* **branche principale du logarithme** *$\mathrm{Log} : \mathbb{C}^- \to \mathbb{C}$ est définie par $\mathrm{Log}(z) := \ln(|z|) + \mathrm{i}\arg(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}^-$, où $\ln$ est le logarithme naturel (népérien) et $-\pi < \arg(z) < \pi$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ t.q. $|z - 1| < 1$, on a le développement $\mathrm{Log}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (z-1)^n$.*

Rappel 2.49 *Une application f entre deux espaces vectoriels normés s'appelle un* **homéomorphisme** *si f est continue, bijective et si sa réciproque est également continue.*

3 Algèbres vs. groupes de Lie

Le résultat central de cette section sera le suivant :

Soient G et H des GLM et soit G simplement connexe. Alors, pour tout HAL $\varphi : \mathrm{Lie}(G) \to \mathrm{Lie}(H)$, il existe un unique HGL $\Phi : G \to H$ t.q., pour tout $X \in \mathrm{Lie}(G)$, on a

$$\Phi(\mathrm{e}^X) = \mathrm{e}^{\varphi(X)}.$$

Ce résultat implique qu'il existe une correspondance naturelle entre les représentations de G et celles de $\mathrm{Lie}(G)$. Cela permet de réduire l'étude des représentations de G à l'étude des représentations de $\mathrm{Lie}(G)$, la dernière étant, en général, plus simple .

L'un des outils que nous allons utiliser pour démontrer ce résultat est la formule de Baker-Campbell-Hausdorff suivante.

3.1 Formule de Baker-Campbell-Hausdorff

Proposition 3.1 *Soient $X, Y \in \mathrm{Mat}(d, \mathbb{C})$ suffisamment petits. Alors, on a*

$$\boxed{\log(\mathrm{e}^X \mathrm{e}^Y) = X + \int_0^1 \mathrm{d}t\, g(\mathrm{e}^{\mathrm{ad}_X} \mathrm{e}^{t\mathrm{ad}_Y})(Y),} \tag{3}$$

où $g : B_1(1) := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-1| < 1\} \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est la fonction analytique définie, pour tout $z \in B_1(1)$, par

$$g(z) := 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} (z-1)^n.$$

La formule (3) *s'appelle la* **formule de Baker-Campbell-Hausdorff (BCH)***.*

Remarque 3.2

(a) *Pour tout $X \in \mathrm{gl}(d, \mathbb{C}) = \mathrm{Lie}(\mathrm{GL}(d, \mathbb{C})) = \mathrm{Mat}(d, \mathbb{C})$, l'opérateur $\mathrm{e}^{\mathrm{ad}_X} : \mathrm{gl}(d, \mathbb{C}) \to \mathrm{gl}(d, \mathbb{C})$ est l'opérateur linéaire défini par sa série exponentielle (et $\mathrm{ad}_X : \mathrm{gl}(d, \mathbb{C}) \to \mathrm{gl}(d, \mathbb{C})$ est donné dans Déf. 2.24).*

(b) *Si $X, Y \in \mathrm{Mat}(d, \mathbb{C})$ sont suffisamment petits, c.-à-d., si leurs normes de Hilbert-Schmidt sont suffisamment petites, l'opérateur linéaire $\mathrm{e}^{\mathrm{ad}_X} \mathrm{e}^{t\mathrm{ad}_Y}$ est proche de l'opérateur identité sur $\mathrm{gl}(d, \mathbb{C})$ pour tout $t \in [0, 1]$. Alors, $g(\mathrm{e}^{\mathrm{ad}_X} \mathrm{e}^{t\mathrm{ad}_Y})$ est bien défini.*

(c) *On note que la fonction analytique peut s'écrire comme*

$$g(z) = \begin{cases} 1, & z = 1, \\ \frac{z \mathrm{Log}(z)}{z-1}, & z \in B_1(1) \setminus \{1\}, \end{cases}$$

et nous rappelons que Log est la branche principale du logarithme (cf. Rap. 2.48).

De Prop. 3.1 découle le corollaire suivant.

Proposition 3.3 *Soit G un GLM et $\varphi : \mathrm{Lie}(G) \to \mathrm{gl}(d, \mathbb{C})$ un HAL. Alors, pour tout $X, Y \in \mathrm{Lie}(G)$ suffisamment petits, on a*

$$\boxed{\varphi(\log(\mathrm{e}^X \mathrm{e}^Y)) = \log(\mathrm{e}^{\varphi(X)} \mathrm{e}^{\varphi(Y)}).} \tag{4}$$

Démonstration 3.3 Comme, pour tout $X \in \mathrm{Lie}(G)$, on a

$$\mathrm{ad}_X(\mathrm{Lie}(G)) \subseteq \mathrm{Lie}(G),$$

la formule (3) implique que, pour tout $X, Y \in \mathrm{Lie}(G)$ suffisamment petits, on a

$$\log(\mathrm{e}^X \mathrm{e}^Y) \in \mathrm{Lie}(G),$$

c.-à-d., $\varphi(\log(\mathrm{e}^X \mathrm{e}^Y))$ est bien défini. D'autre part, comme φ est un HAL, on a

$$\varphi(\mathrm{ad}_X(Y)) = \varphi([X, Y]) = [\varphi(X), \varphi(Y)] = \mathrm{ad}_{\varphi(X)}(\varphi(Y)).$$

De manière analogue, on a $\varphi(\mathrm{ad}_X^n(Y)) = \mathrm{ad}_{\varphi(X)}^n(\varphi(Y))$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (cf. Prop. 2.25 *(d)*) et

$$\varphi(\mathrm{e}^{\mathrm{ad}_X}(Y)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, \varphi(\mathrm{ad}_X^n(Y)) = \mathrm{e}^{\mathrm{ad}_{\varphi(X)}}(\varphi(Y)).$$

Alors, pour tout $t \in [0, 1]$, on peut écrire que

$$\varphi(\mathrm{e}^{\mathrm{ad}_X} \mathrm{e}^{t\mathrm{ad}_Y}(Y)) = \mathrm{e}^{\mathrm{ad}_{\varphi(X)}} \mathrm{e}^{t\mathrm{ad}_{\varphi(Y)}}(\varphi(Y)).$$

Il en résulte que, pour tout $X, Y \in \mathrm{Lie}(G)$ suffisamment petits,

$$\begin{aligned} \varphi(\log(\mathrm{e}^X \mathrm{e}^Y)) &\overset{\text{BCH}}{=} \varphi(X) + \int_0^1 \mathrm{d}t\, \varphi(g(\mathrm{e}^{\mathrm{ad}_X} \mathrm{e}^{t\mathrm{ad}_Y})(Y)) = \varphi(X) + \int_0^1 \mathrm{d}t\, g(\mathrm{e}^{\mathrm{ad}_{\varphi(X)}} \mathrm{e}^{t\mathrm{ad}_{\varphi(Y)}})(\varphi(Y)) \\ &\overset{\text{BCH}}{=} \log(\mathrm{e}^{\varphi(X)} \mathrm{e}^{\varphi(Y)}), \end{aligned}$$

où, dans la première égalité, nous avons utilisé que φ est continu (parce que φ est une application linéaire sur un espace vectoriel de dimension finie) et, dans la deuxième, que g est donné par une série entière absolument convergente. □

On peut montrer la formule suivante pour la dérivée de l'exponentielle matricielle que nous utiliserons dans la démonstration de la formule de BCH.

Lemme 3.4 *Soit $X \in C^1(\mathbb{R}, \mathrm{Mat}(d, \mathbb{C}))$. Alors, on a*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, \mathrm{e}^{X(t)} = \mathrm{e}^{X(t)}\, h(\mathrm{ad}_{X(t)})\Big(\tfrac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t}\Big),$$

où $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est la fonction entière (c.-à-d., analytique en tout point de $\mathbb{C}$) définie par

$$h(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!}\, z^n = \begin{cases} 1, & z = 0, \\ \frac{1-\mathrm{e}^{-z}}{z}, & z \neq 0. \end{cases}$$

A présent, nous allons démontrer la formule de BCH.

Démonstration 3.1 Soient $X, Y \in \mathrm{Mat}(d, \mathbb{C})$ suffisamment petits. Alors, l'application $Z : [0,1] \to \mathrm{Mat}(d, \mathbb{C})$, définie, pour tout $t \in [0,1]$, par

$$Z(t) := \log(\mathrm{e}^X \mathrm{e}^{tY}),$$

est bien définie (c.-à-d., $\mathrm{e}^X \mathrm{e}^{tY} \in B_1(1)$ pour tout $t \in [0,1]$), et on peut facilement montrer que $Z \in C^1([0,1], \mathrm{Mat}(d, \mathbb{C}))$. Ensuite, en utilisant Lem. 3.4 et $\mathrm{e}^{Z(t)} = \mathrm{e}^X \mathrm{e}^{tY}$, on a

$$\underbrace{\mathrm{e}^{-Z(t)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathrm{e}^{Z(t)}}_{=Y} = h(\mathrm{ad}_{Z(t)}) \left(\tfrac{\mathrm{d}Z(t)}{\mathrm{d}t}\right).$$

Comme $X, Y \in \mathrm{Mat}(d, \mathbb{C})$ sont suffisamment petits, la matrice $h(\mathrm{ad}_{Z(t)})$ est proche de l'identité et donc inversible, d'où on obtient

$$\frac{\mathrm{d}Z(t)}{\mathrm{d}t} = h(\mathrm{ad}_{Z(t)})^{-1}(Y). \tag{5}$$

En plus, comme, d'après Prop. 2.25 *(c)*, on a l'identité

$$\mathrm{e}^{\mathrm{ad}_{Z(t)}} = \mathrm{Ad}_{\mathrm{e}^{Z(t)}} = \mathrm{Ad}_{\mathrm{e}^X \mathrm{e}^{tY}} = \mathrm{Ad}_{\mathrm{e}^X} \mathrm{Ad}_{\mathrm{e}^{tY}} = \mathrm{e}^{\mathrm{ad}_X} \mathrm{e}^{t\,\mathrm{ad}_Y},$$

on peut écrire $\mathrm{ad}_{Z(t)}$ dans la forme

$$\mathrm{ad}_{Z(t)} = \log(\mathrm{e}^{\mathrm{ad}_X} \mathrm{e}^{t\,\mathrm{ad}_Y}).$$

Comme $h(\mathrm{Log}(z))g(z) = 1$ pour tout $z \in B_1(1)$ (cf. Lem. 3.4 et Prop. 3.1), on a

$$h(\mathrm{ad}_{Z(t)})^{-1} = h(\log(\mathrm{e}^{\mathrm{ad}_X} \mathrm{e}^{t\,\mathrm{ad}_Y}))^{-1} = g(\mathrm{e}^{\mathrm{ad}_X} \mathrm{e}^{t\,\mathrm{ad}_Y}). \tag{6}$$

Finalement, en substituant (6) dans (5) et en intégrant ensuite (5) p.r. à t de $t = 0$ à $t = 1$, nous trouvons

$$\begin{aligned} \log(\mathrm{e}^X \mathrm{e}^Y) - X = Z(1) - Z(0) &= \int_0^1 \mathrm{d}t \, \frac{\mathrm{d}Z(t)}{\mathrm{d}t} = \int_0^1 \mathrm{d}t \, h(\mathrm{ad}_{Z(t)})^{-1}(Y) \\ &= \int_0^1 \mathrm{d}t \, g(\mathrm{e}^{\mathrm{ad}_X} \mathrm{e}^{t\,\mathrm{ad}_Y})(Y). \end{aligned}$$

□

L'expression suivante, souvent utile dans la pratique, fournit un développement de la formule de BCH qui contient les simples et les doubles commutateurs.

Proposition 3.5 *Soient $X, Y \in \mathrm{Mat}(d, \mathbb{C})$ t.q. $\|X\|, \|Y\| \leq \varepsilon$ pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit. Alors, on a*

$$\log(\mathrm{e}^X \mathrm{e}^Y) = X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \frac{1}{12}[X, [X, Y]] - \frac{1}{12}[Y, [X, Y]] + \mathcal{O}(\varepsilon^4).$$

Démonstration 3.1 Cf. Exr. 22 □

3.2 Homomorphismes de groupes et d'algèbres de Lie

Le Thm. 2.21 nous disait que, pour des GLM G et H et pour tout HGL $\Phi : G \to H$, il existe un unique HAL $\varphi : \mathrm{Lie}(G) \to \mathrm{Lie}(H)$ t.q. $\Phi(\mathrm{e}^X) = \mathrm{e}^{\varphi(X)}$ pour tout $X \in \mathrm{Lie}(G)$. Pour des GLM G simplement connexes, le théorème suivant, le deuxième théorème principal de ce cours, énonce qu'il existe une réciproque de Thm. 2.21.

Théorème 3.6 *Soient G et H des GLM et soit $\varphi : \mathrm{Lie}(G) \to \mathrm{Lie}(H)$ un HAL. Si G est simplement connexe, alors il existe un unique HGL $\Phi : G \to H$ t.q., pour tout $X \in \mathrm{Lie}(G)$,*

$$\Phi(\mathrm{e}^X) = \mathrm{e}^{\varphi(X)}.$$

On dira que Φ est le **HGL associé au HAL** *φ.*

En utilisant Thm. 3.6, on trouve immédiatement le corollaire suivant (cf. Prop. 2.22).

Proposition 3.7 *Soient G et H des GLM simplement connexes. Alors, on a*

$$\boxed{\mathrm{Lie}(G) \cong \mathrm{Lie}(H) \implies G \cong H.}$$

Démonstration 3.7 Cf. Exr. 23 □

A présent, nous allons procéder à la démonstration de Thm. 3.6 qui se fera en 6 étapes.

Démonstration 3.6
Etape 1 (Définir Φ dans un voisinage de $1 \in G$) :
D'après Prop. 2.27, il existe une réciproque locale de l'application exponentielle, à savoir, le logarithme matriciel, qui envoie un voisinage V de $1 \in G$ sur un voisinage U de $0 \in \mathrm{Lie}(G)$. Pour ce qui s'ensuit, nous allons choisir et fixer un voisinage V suffisamment petit pour que nous puissions appliquer la formule de BCH pour tout $A \in V$.
Pour tout $A \in V$, l'application $\Phi : V \subseteq G \to H$ est définie par

$$\Phi(A) := \mathrm{e}^{\varphi(\log(A))}. \tag{7}$$

Etape 2 (Définir Φ le long d'un chemin) :
Comme G est connexe, pour tout $A \in G$, il existe un chemin $\Gamma \in C([0,1], G)$ t.q. $\Gamma(0) = 1$ et $\Gamma(1) = A$. Alors, il existe une partition $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = 1$ de l'interval $[0,1]$ avec $N \in \mathbb{N}^*$ t.q., pour tout $i \in \{0, \ldots, N-1\}$ et tout $t_i \le s \le t \le t_{i+1}$, on a (cf. la démonstration de Prop. 2.28)

$$\Gamma(s)^{-1}\Gamma(t) \in V. \tag{8}$$

Nous appellerons une partition $(t_0, \dots, t_N) \in [0,1]^{N+1}$ qui a cette propriété une **partition valable**. Ayant une telle partition valable à notre disposition, nous pouvons écrire A comme un produit d'éléments dans V, c.-à-d.,

$$A = \prod_{i=0}^{N-1} \Gamma(t_i)^{-1}\Gamma(t_{i+1}) \tag{9}$$

Comme nous voulons que Φ soit un HGL, nous définissons Φ sur un tel A comme

$$\Phi(A) := \prod_{i=0}^{N-1} \Phi(\Gamma(t_i)^{-1}\Gamma(t_{i+1})) \tag{10}$$

où nous utilisons (7) de *Etape 1* pour

$$\Phi(\Gamma(t_i)^{-1}\Gamma(t_{i+1})) = \mathrm{e}^{\varphi(\log[\Gamma(t_i)^{-1}\Gamma(t_{i+1})])}.$$

Pour que $\Phi(A)$ soit bien défini, il faut que nous montrions que cette définition est indépendante du choix du chemin Γ et du choix de la partition valable pour un chemin donné.

Etape 3 (Montrer que la définition est indépendante de la partition) :
Ce n'est que dans cette étape que nous allons utiliser la formule de BCH.

Nous commençons par montrer que la définition de $\Phi(A)$ dans (10) est indépendante du passage à un raffinement de la partition valable initiale. Ainsi, si, pour un $i \in \{0, \dots, N-1\}$ fixé, nous ajoutons un point supplémentaire $s \in (t_i, t_{i+1})$ dans la partition valable initiale, la nouvelle partition est également valable et le facteur $\Phi(\Gamma(t_i)^{-1}\Gamma(t_{i+1}))$ dans la définition (10) de $\Phi(A)$ est remplacé par le produit des deux facteurs $\Phi(\Gamma(t_i)^{-1}\Gamma(s))$ et $\Phi(\Gamma(s)^{-1}\Gamma(t_{i+1}))$. Mais comme, d'après Prop. 3.3, on a $\mathrm{e}^{\varphi(X)}\mathrm{e}^{\varphi(Y)} = \mathrm{e}^{\varphi(\log(\mathrm{e}^X\mathrm{e}^Y))}$ pour tout $X, Y \in \mathrm{Lie}(G)$ suffisamment petits, on trouve

$$\begin{aligned}\Phi(\Gamma(t_i)^{-1}\Gamma(s))\Phi(\Gamma(s)^{-1}\Gamma(t_{i+1})) &\overset{(7)}{=} \mathrm{e}^{\varphi(\log[\Gamma(t_i)^{-1}\Gamma(s)])}\mathrm{e}^{\varphi(\log[\Gamma(s)^{-1}\Gamma(t_{i+1})])} \\ &\overset{\boxed{\text{BCH : (4)}}}{=} \mathrm{e}^{\varphi(\log[\mathrm{e}^{\log[\Gamma(t_i)^{-1}\Gamma(s)]}\mathrm{e}^{\log[\Gamma(s)^{-1}\Gamma(t_{i+1})]}])} \\ &= \mathrm{e}^{\varphi(\log[\Gamma(t_i)^{-1}\Gamma(s)\Gamma(s)^{-1}\Gamma(t_{i+1})])} \\ &\overset{(7)}{=} \Phi(\Gamma(t_i)^{-1}\Gamma(t_{i+1})),\end{aligned} \tag{11}$$

c.-à-d., ce produit ne dépend donc pas du point s ajouté. En répétant cet argument, on trouve que $\Phi(A)$ est inchangé si on ajoute un nombre fini de points à la partition initiale. Ensuite, on remarque que deux partitions valables différentes possèdent un raffinement commun, à savoir leur union. Alors, la définition de $\Phi(A)$ est indépendante de la partition valable.

Etape 4 (Montrer que la définition est indépendante du chemin) :
C'est n'est que dans cette étape que nous allons utiliser la connexité simple de G.

Soit $A \in G$ et $\Gamma_0, \Gamma_1 \in C([0,1], G)$ deux chemins dans G t.q. $\Gamma_0(0) = \Gamma_1(0) = 1$ et $\Gamma_0(1) = \Gamma_1(1) = A$. Comme G est simplement connexe, Γ_0 et Γ_1 sont **homotopes**, c.-à-d., il existe une application $\Lambda \in C([0,1]\times[0,1], G)$ t.q.

$$\begin{cases} \Lambda(0,t) = \Gamma_0(t), & \text{pour tout } t\in[0,1], \\ \Lambda(1,t) = \Gamma_1(t), & \text{pour tout } t\in[0,1], \\ \Lambda(s,0) = 1, & \text{pour tout } s\in[0,1], \\ \Lambda(s,1) = A, & \text{pour tout } s\in[0,1], \end{cases}$$

et Λ s'appelle une **homotopie** entre Γ_0 et Γ_1 (cette formulation, qui est à l'origine du nom "connexité simple", est équivalente à Déf. 1.30). Alors, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ t.q., pour tout $s, s', t, t' \in [0,1]$ avec $|s-s'|, |t-t'| \leq \frac{2}{N}$, on a

$$\Lambda(s,t)^{-1}\Lambda(s',t') \in V. \tag{12}$$

Ensuite, pour tout $i \in \{0,\dots,N-1\}$ et $j \in \{1,\dots,N\}$, les chemins $\Lambda_{i,j} \in C([0,1],G)$ sont définis, pour tout $t\in[0,1]$, par

$$\Lambda_{i,j}(t) := \begin{cases} \Lambda(\frac{i+1}{N}, t), & t \in [0, \frac{j-1}{N}], \\ \Lambda(\frac{i+j}{N} - t, t), & t \in [\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N}], \\ \Lambda(\frac{i}{N}, t), & t\in[\frac{j}{N}, 1], \end{cases}$$

et, pour tout $i \in \{0,\dots,N-1\}$, les chemins $\Lambda_{i,0} \in C([0,1],G)$ sont définis, pour tout $t\in[0,1]$, par $\Lambda_{i,0}(t) := \Lambda(\frac{i}{N}, t)$.
A présent, nous considérons la suite finie des $N(N+1)+1$ chemins

$$\begin{array}{cccccc} \Gamma_0 = \Lambda_{0,0}, & \Lambda_{0,1}, & \Lambda_{0,2}, & \dots, & \Lambda_{0,N}, & \\ \Lambda_{1,0}, & \Lambda_{1,1}, & \Lambda_{1,2}, & \dots, & \Lambda_{1,N}, & \\ \vdots & & & & & \\ \Lambda_{N-1,0}, & \Lambda_{N-1,1}, & \Lambda_{N-1,2}, & \dots, & \Lambda_{N-1,N}, & \Gamma_1, \end{array} \tag{13}$$

et nous allons montrer que $\Phi(A)$, calculé pour un élément de cette suite en utilisant (10), est égal à $\Phi(A)$ calculé pour l'élément suivant en utilisant (10). Pour ce faire, nous remarquons que, pour tout $i\in\{0,\dots,N-1\}$ et tout $j\in\{1,\dots,N-1\}$, on a, pour tout $t \in [0,1]\backslash(\frac{j-1}{N}, \frac{j+1}{N})$,

$$\Lambda_{i,j}(t) = \Lambda_{i,j+1}(t). \tag{14}$$

Comme, d'après *Etape 3*, $\Phi(A)$ est indépendant de la partition valable choisie, nous utilisons et pour $\Lambda_{i,j}$ et pour $\Lambda_{i,j+1}$ la partition valable

$$(0, \tfrac{1}{N}, \tfrac{2}{N}, \dots, \tfrac{j-1}{N}, \tfrac{j+1}{N}, \tfrac{j+2}{N}, \dots, 1) \in [0,1]^N. \tag{15}$$

En plus, comme, d'après (10), $\Phi(A)$ ne dépend que des points de la partition valable (15), on trouve, grâce à (14), que la valeur de $\Phi(A)$ est la même si on la calcule le long de $\Lambda_{i,j}$ ou le long de $\Lambda_{i,j+1}$. Finalement, par un argument analogue, on obtient que la valeur de $\Phi(A)$ est la même si on la calcule le long de $\Lambda_{i,N}$ ou le long de $\Lambda_{i+1,0}$ (c.-à-d., lors du passage d'une ligne à l'autre dans (13)) et, de la même façon, si on la calcule le long de $\Lambda_{N-1,N}$ ou le long de Γ_1. Alors, $\Phi(A)$ est indépendant du chemin choisi qui relie 1 à A.

Etape 5 (Montrer que Φ est un homomorphisme) :
Soient $A, B \in G$ et soient $\Gamma_A, \Gamma_B \in C([0,1], G)$ t.q. $\Gamma_A(0) = \Gamma_B(0) = 1$, $\Gamma_A(1) = A$ et $\Gamma_B(1) = B$. Ensuite, le chemin $\Gamma_{AB} \in C([0,1], G)$ qui relie 1 à AB est défini, pour tout $t \in [0,1]$, par

$$\Gamma_{AB}(t) := \begin{cases} \Gamma_A(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ A\Gamma_B(2t-1), & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases} \tag{16}$$

Soit $(t_0, \ldots, t_N) \in [0,1]^{N+1}$ une partition valable pour Γ_A et $(s_0, \ldots, s_M) \in [0,1]^{M+1}$ une partition valable pour Γ_B. Alors, la partition

$$(r_0, \ldots, r_{N+M+1}) := (\tfrac{t_0}{2}, \ldots, \tfrac{t_N}{2}, \tfrac{1}{2} + \tfrac{s_0}{2}, \ldots, \tfrac{1}{2} + \tfrac{s_M}{2}) \in [0,1]^{N+M+2}, \tag{17}$$

est une partition valable pour Γ_{AB}, d'abord, parce que, pour tout $i \in \{0, \ldots, N+M\}$ et tout $r_i \le s \le t \le r_{i+1}$, on a

$$\Gamma_{AB}(s)^{-1}\Gamma_{AB}(t) = \begin{cases} \Gamma_A(2s)^{-1}\Gamma_A(2t), & \text{si } i \in \{0, \ldots, N\}, \\ \Gamma_B(2s-1)^{-1}A^{-1}A\Gamma_B(2t-1), & \text{si } i \in \{N, \ldots, N+M\}, \end{cases}$$

et parce que $(t_0, \ldots, t_N)$ et $(s_0, \ldots, s_M)$ sont des partitions valables. Ensuite, en utilisant (10), on peut écrire

$$\begin{aligned} \Phi(A) &= \prod_{i=0}^{N-1} \Phi(\Gamma_A(t_i)^{-1}\Gamma_A(t_{i+1})), \\ \Phi(B) &= \prod_{i=0}^{N-1} \Phi(\Gamma_B(s_i)^{-1}\Gamma_B(s_{i+1})), \end{aligned}$$

et, en utilisant (17), on a également

$$\Phi(AB) = \prod_{i=0}^{N-1} \Phi\big(\Gamma_{AB}\big(\tfrac{t_i}{2}\big)^{-1}\Gamma_{AB}\big(\tfrac{t_{i+1}}{2}\big)\big) \prod_{j=0}^{M-1} \Phi\big(\Gamma_{AB}\big(\tfrac{1+s_j}{2}\big)^{-1}\Gamma_{AB}\big(\tfrac{1+s_{j+1}}{2}\big)\big). \tag{18}$$

En substituant (16) dans (18), on obtient $\Phi(AB) = \Phi(A)\Phi(B)$.

Etape 6 (Montrer que Φ est le HGL associé au HAL φ) :
Comme Φ est donné par (7) dans un voisinage de 1, on a, pour tout $X \in \mathrm{Lie}(G)$ et tout $|t|$ suffisamment petit, que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \Phi(\mathrm{e}^{tX}) \overset{(7)}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \mathrm{e}^{\varphi(\log[\mathrm{e}^{tX}])} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \mathrm{e}^{t\varphi(X)} = \varphi(X).$$

Alors, d'après Thm. 2.21, on arrive à $\Phi(\mathrm{e}^X) = \mathrm{e}^{\varphi(X)}$ pour tout $X \in \mathrm{Lie}(G)$. $\square$

4 Théorie élémentaire des représentations

4.1 Définitions

Définition 4.1 *Soit G un GLM et $\mathcal{V}$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ t.q. $1 \leq \dim(\mathcal{V}) < \infty$. Une* **représentation de G sur $\mathcal{V}$ (RGL)** *est un HGL*

$$\Pi : G \to \mathrm{GL}(\mathcal{V}).$$

Pour une AL $\mathfrak{g}$ sur $\mathbb{K}$, une **représentation de $\mathfrak{g}$ sur $\mathcal{V}$ (RAL)** *est un HAL*

$$\pi : \mathfrak{g} \to \mathrm{gl}(\mathcal{V}).$$

Si Π ou π est un **monomorphisme***, c.-à-d., un homomorphisme injectif, les représentations s'appellent* **fidéles***. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), les représentations s'appellent* **complexes** *(ou* **réelles***). On utilisera également la notation par les triplets $(G, \mathcal{V}, \Pi)$ et $(\mathfrak{g}, \mathcal{V}, \pi)$.*

Remarque 4.2

(a) En identifiant $\mathcal{V}$ et $\mathbb{K}^d$, où $d = \dim(\mathcal{V})$ (cf. Rem. 2.23), on peut écrire $\Pi : G \to \mathrm{GL}(d, \mathbb{K})$ et $\pi : \mathfrak{g} \to \mathrm{gl}(d, \mathbb{K})$.

(b) Une représentation de G sur $\mathcal{V}$ peut se voir comme une **action** *du groupe G sur l'espace vectoriel $\mathcal{V}$, c.-à-d., comme une application*

$$\begin{aligned} \mu : G \times \mathcal{V} &\to \mathcal{V}, \\ (A, v) &\mapsto \mu(A, v) := \Pi(A)v, \end{aligned}$$

t.q., pour tout $A, B \in G$ et tout $v \in \mathcal{V}$, on a

$$\begin{aligned} \mu(1, v) &= v, \\ \mu(A, \mu(B, v)) &= \mu(AB, v). \end{aligned}$$

Définition 4.3 *Soit G un GLM et $(G, \mathcal{V}, \Pi)$ une RGL de G sur $\mathcal{V}$. Un sous-espace vectoriel $W \subseteq \mathcal{V}$ s'appelle* **invariant** *si, pour tout $A \in G$, on a*

$$\Pi(A)W \subseteq W,$$

c.-à-d., $\Pi(A)w \in W$ pour tout $w \in W$. Un sous-espace invariant W de $\mathcal{V}$ s'appelle **non trivial** *si $W \neq \{0\}$ et $W \neq \mathcal{V}$. Une représentation qui n'a pas de sous-espace invariant non trivial s'appelle* **irréductible***. Les notions* **invariant**, **non trivial** *et* **irréductible** *sont définies de manière analogue pour les représentations d'une AL.*

En plus, nous avons besoin de la définition suivante.

Définition 4.4 *Soit G un GLM, $(G, \mathcal{V}_1, \Pi_1)$ une RGL de G sur $\mathcal{V}_1$ et $(G, \mathcal{V}_2, \Pi_2)$ une RGL de G sur $\mathcal{V}_2$. Une application linéaire $T : \mathcal{V}_1 \to \mathcal{V}_2$ s'appelle un* **opérateur d'entrelacement** *si, pour tout $A \in G$ et tout $v \in \mathcal{V}_1$, on a*

$$\boxed{T\Pi_1(A)v = \Pi_2(A)Tv,}$$

c.-à-d., on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V}_1 & \xrightarrow{\Pi_1(A)} & \mathcal{V}_1 \\ {\scriptstyle T}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle T} \\ \mathcal{V}_2 & \xrightarrow[\Pi_2(A)]{} & \mathcal{V}_2 \end{array}$$

Si, en plus, T est inversible, T s'appelle une **équivalence** *et les représentations Π_1 et Π_2 sont dites* **équivalentes**, *noté $\boxed{\Pi_1 \sim \Pi_2}$. Les définitions pour les AL sont analogues.*

Proposition 4.5 *Soit G un GLM et $(G, \mathcal{V}, \Pi)$ une RGL. Alors, il existe une unique RAL $(\mathrm{Lie}(G), \mathcal{V}, \pi)$ t.q., pour tout $X \in \mathrm{Lie}(G)$, on a*

$$\Pi(\mathrm{e}^X) = \mathrm{e}^{\pi(X)}.$$

En outre, pour tout $X \in \mathrm{Lie}(G)$ et tout $A \in G$, on a

$$\pi(X) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \Pi(\mathrm{e}^{tX}),$$
$$\pi(AXA^{-1}) = \Pi(A)\pi(X)\Pi(A)^{-1}.$$

La représentation π s'appelle la **RAL associée à la RGL** *Π.*

Démonstration 4.5 Appliquer Thm. 2.21 pour $H = \mathrm{GL}(\mathcal{V})$ et $\Phi = \Pi$ (en notant que $\mathrm{Lie}(\mathrm{GL}(\mathcal{V})) = \mathrm{gl}(\mathcal{V})$). □

En ce qui concerne l'irréductibilité, nous avons le fait suivant.

Proposition 4.6 *Soit G un GLM connexe, $(G, \mathcal{V}, \Pi)$ une RGL et $(\mathrm{Lie}(G), \mathcal{V}, \pi)$ la RAL associée. Alors :*

$$\boxed{\Pi \textit{ est irréductible.} \quad \Longleftrightarrow \quad \pi \textit{ est irréductible.}}$$

Démonstration 4.6
$\Rightarrow$: Soit Π irréductible et soit $W \subseteq \mathcal{V}$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{V}$ qui est invariant sous l'action de la RAL π associée, c.-à-d., $\pi(X)W \subseteq W$ pour tout $X \in \mathrm{Lie}(G)$. Comme G est connexe, pour tout $A \in G$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \dots, X_N \in \mathrm{Lie}(G)$ t.q. (cf. Prop. 2.28)

$$A = \mathrm{e}^{X_1} \dots \mathrm{e}^{X_N}.$$

Comme $\pi(X_i)W \subseteq W$ pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$ et comme $\mathrm{e}^{\pi(X_i)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \pi(X_i)^n$, on a également $\mathrm{e}^{\pi(X_i)}W \subseteq W$ pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$. Il en résulte que

$$\Pi(A)W = \Pi(\mathrm{e}^{X_1} \dots \mathrm{e}^{X_N})W = \Pi(\mathrm{e}^{X_1}) \dots \Pi(\mathrm{e}^{X_N})W = \mathrm{e}^{\pi(X_1)} \dots \mathrm{e}^{\pi(X_N)}W \subseteq W.$$

Comme Π est irréductible, on obtient $W = \{0\}$ ou $W = \mathcal{V}$. Alors, π est irréductible.

$\Leftarrow$: Soit π irréductible et soit $W \subseteq \mathcal{V}$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{V}$ qui est invariant sous l'action de la RGL Π, c.-à-d., $\Pi(A)W \subseteq W$ pour tout $A \in G$. Alors, pour tout $X \in \mathrm{Lie}(G)$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\Pi(\mathrm{e}^{tX})W \subseteq W.$$

D'après Prop. 4.5, il en découle que, pour tout $w \in W$, on a

$$\pi(X)w = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \Pi(\mathrm{e}^{tX})w = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \big(\underbrace{\Pi(\mathrm{e}^{tX})w}_{\in W} - w\big) \in W,$$

et donc, on obtient $W = \{0\}$ ou $W = V$. Alors, Π est irréductible. □

Proposition 4.7 *Soit G un GLM connexe. Pour $i \in \{1, 2\}$, soit $(G, \mathcal{V}_i, \Pi_i)$ une RGL de G et $(\mathrm{Lie}(G), \mathcal{V}_i, \pi_i)$ la RAL associée. Alors :*

$$\boxed{\pi_1 \sim \pi_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \Pi_1 \sim \Pi_2}$$

Démonstration 4.7 Cf. Exr. 24 □

Par la suite, nous allons étudier la question d'irréductibilité pour les RAL de la complexification $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ d'une AL $\mathfrak{g}$.

Proposition 4.8 *Soit $\mathfrak{g}$ une AL réelle, $(\mathfrak{g}, \mathcal{V}, \pi)$ une RAL complexe de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ la complexification de $\mathfrak{g}$. En plus, soit l'application $\pi_{\mathbb{C}} : \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \to \mathrm{gl}(\mathcal{V})$, définie, pour tout $X, Y \in \mathfrak{g}$, par*

$$\pi_{\mathbb{C}}(X, Y) := \pi(X) + \mathrm{i}\pi(Y).$$

Alors :

(a) $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathcal{V}, \pi_{\mathbb{C}})$ est une RAL complexe de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ appelée la **complexification** *de π. En outre, $\pi_{\mathbb{C}}$ est l'unique prolongement à $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ de π.*

(b) En ce qui concerne l'irréductibilité, nous avons :

$$\boxed{\pi_{\mathbb{C}} \text{ est irréductible.} \quad \Longleftrightarrow \quad \pi \text{ est irréductible.}}$$

Démonstration 4.8

(a) Appliquer Prop. 2.39 pour $\mathfrak{h} = \mathrm{gl}(\mathcal{V})$ et $\varphi = \pi$.

(b) $\Rightarrow$: Soit $\pi_{\mathbb{C}}$ irréductible et soit $W \subseteq \mathcal{V}$ un sous-espace vectoriel complexe de $\mathcal{V}$ qui est invariant sous l'action de π, c.-à-d., $\pi(X)W \subseteq W$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$. Alors, pour tout $X, Y \in \mathfrak{g}$ et tout $w \in W$, on a

$$\pi_{\mathbb{C}}(X,Y)w = \underbrace{\pi(X)w}_{\in W} + \mathrm{i}\,\underbrace{\pi(Y)w}_{\in W} \in W,$$

c.-à-d., $\pi_{\mathbb{C}}(Z)W \subseteq W$ pour tout $Z \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Comme $\pi_{\mathbb{C}}$ est irréductible, on obtient $W = \{0\}$ ou $W = \mathcal{V}$. Alors, π est irréductible.

$\Leftarrow$: Soit π irréductible et soit $W \subseteq \mathcal{V}$ un sous-espace vectoriel complexe de $\mathcal{V}$ qui est invariant sous l'action de $\pi_{\mathbb{C}}$, c.-à-d., $\pi_{\mathbb{C}}(Z)W \subseteq W$ pour tout $Z \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Alors, pour tout $X \in \mathfrak{g}$ et tout $w \in W$, on a

$$\pi_{\mathbb{C}}(X,0)w = \pi(X)w \in W,$$

et donc, $W = \{0\}$ ou $W = \mathcal{V}$. Alors, $\pi_{\mathbb{C}}$ est irréductible.

$\square$

Plus tard, nous allons étudier quelques aspects de la classe des représentations suivantes.

Définition 4.9 *Soit G un GLM. Une RGL complexe $(G, \mathcal{V}, \Pi)$ de G s'appelle une représentation* **unitaire** *de G si $\Pi : G \to \mathrm{U}(\mathcal{V})$ (où nous identifions $\mathrm{U}(\mathcal{V})$ et $\mathrm{U}(\dim(\mathcal{V}))$ comme dans Rem. 2.23).*

4.2 Exemples

Définition 4.10 *Soit G un GLM dans $\mathrm{GL}(d, \mathbb{C})$.*

(a) La RGL complexe $\Pi : G \to \mathrm{GL}(\mathbb{C}^d)$, définie, pour tout $A \in G$ et tout $v \in \mathbb{C}^d$, par

$$\Pi(A)v := Av,$$

s'appelle la **représentation standard** *de G (si G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(d, \mathbb{R})$, on peut définir une RGL réelle $\Pi : G \to \mathrm{GL}(\mathbb{R}^d)$ par $\Pi(A)v := Av$ pour tout $A \in G$ et tout $v \in \mathbb{R}^d$).*

(b) La RAL complexe $\pi : \mathrm{Lie}(G) \to \mathrm{gl}(\mathbb{C}^d)$, définie, pour tout $X \in \mathrm{Lie}(G)$ et tout $v \in \mathbb{C}^d$, par

$$\pi(X)v := Xv,$$

s'appelle la **représentation standard** *de $\mathrm{Lie}(G)$ (si G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(d, \mathbb{R})$, on peut définir une RAL réelle $\pi : \mathrm{Lie}(G) \to \mathrm{gl}(\mathbb{R}^d)$ par $\pi(X)v := Xv$ pour tout $X \in \mathrm{Lie}(G)$ et tout $v \in \mathbb{R}^d$).*

Exemple 4.11

(a) $\Pi(U)z = Uz$ *pour tout* $U \in \mathrm{SU}(2)$ *et tout* $z \in \mathbb{C}^2$

(b) $\Pi(R)x = Rx$ *pour tout* $R \in \mathrm{SO}(3)$ *et tout* $x \in \mathbb{R}^3$

Définition 4.12

(a) Soit G *un GLM. La RGL complexe* $\Pi : G \to \mathrm{GL}(\mathbb{C})$*, définie, pour tout* $A \in G$*, par*

$$\Pi(A) := 1,$$

s'appelle la **représentation triviale** *de* G*.*

(b) Soit $\mathfrak{g}$ *une AL. La RAL complexe* $\pi : \mathfrak{g} \to \mathrm{gl}(\mathbb{C})$*, définie, pour tout* $X \in \mathfrak{g}$*, par*

$$\pi(X) := 0,$$

s'appelle la **représentation triviale** *de* $\mathfrak{g}$*.*

Définition 4.13

(a) Soit G *un GLM. La RGL* $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{GL}(\mathrm{Lie}(G))$*, définie, pour tout* $A \in G$ *et tout* $X \in \mathrm{Lie}(G)$*, par*

$$\mathrm{Ad}_A(X) := AXA^{-1},$$

s'appelle la **représentation adjointe** *de* G*.*

(b) Soit $\mathfrak{g}$ *une AL. La RAL* $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{gl}(\mathfrak{g})$*, définie, pour tout* $X, Y \in \mathfrak{g}$*, par*

$$\mathrm{ad}_X(Y) := [X, Y],$$

s'appelle la **représentation adjointe** *de* $\mathfrak{g}$*.*

Exemple 4.14

(a) Les matrices $\{E_1, E_2, E_3\} \subseteq \mathrm{Mat}(3, \mathbb{C})$*, définies par*

$$E_1 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 := \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

forment une base de $\mathrm{so}(3)$*. Pour tout* $i, j \in \{1, 2, 3\}$*, les constantes de structure de* $\mathrm{so}(3)$ *(p.r. à la base* $\{E_1, E_2, E_3\}$*) sont données par les symboles de Levi-Cività* ε_{ijk} *(cf. Déf. 2.35 et Rap. 4.23), c.-à-d.,*

$$[E_i, E_j] = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} E_k.$$

En plus, on a $E_i e_j = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} e_k$ *pour tout* $i, j \in \{1, 2, 3\}$*, où* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *est la base canonique de* $\mathbb{R}^3$*.*

(b) La représentation standard et la représentation adjointe de $\mathrm{so}(3)$ *sont équivalentes.*

(c) La représentation standard et la représentation adjointe de $\mathrm{SO}(3)$ *sont équivalentes.*

Démonstration 4.14 Cf. Exr. 25 □

4.3 Lemme de Schur

Le lemme de Schur est un résultat important concernant les opérateurs d'entrelacement de représentations irréductibles.

Proposition 4.15 *Soit G un GLM.*

(a) Soient $(G, \mathcal{V}_1, \Pi_1)$ et $(G, \mathcal{V}_2, \Pi_2)$ deux RGL réelles ou complexes irréductibles de G et soit $T : \mathcal{V}_1 \to \mathcal{V}_2$ un opérateur d'entrelacement. Alors, $T = 0$ ou T est un isomorphisme.

(b) Soit $(G, \mathcal{V}, \Pi)$ une RGL complexe irréductible de G et soit $T : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ un opérateur d'entrelacement. Alors, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ t.q. $T = \lambda 1$.

(c) Soient $(G, \mathcal{V}_1, \Pi_1)$ et $(G, \mathcal{V}_2, \Pi_2)$ deux RGL complexes irréductibles de G et soient $T_1 : \mathcal{V}_1 \to \mathcal{V}_2$ et $T_2 : \mathcal{V}_1 \to \mathcal{V}_2$ deux opérateurs d'entrelacement non zéro. Alors, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ t.q. $T_1 = \lambda T_2$.

Ces énoncés s'appellent le **lemme de Schur** *(Schur, 1907). Ils restent vrais si le GLM G est remplacé par une AL $\mathfrak{g}$.*

Démonstration 4.15

(a) Soit $v \in \ker(T)$ (c.-à-d., $Tv = 0$, cf. Rap. 5.18). Alors, pour tout $A \in G$, on a

$$T\Pi_1(A)v = \Pi_2(A)Tv = 0.$$

Il en résulte que $\ker(T)$ est un sous-espace de $\mathcal{V}_1$ qui est invariant sous l'action de la RGL Π_1, c.-à-d., pour tout $A \in G$, on a

$$\Pi_1(A)\ker(T) \subseteq \ker(T).$$

Comme Π_1 est irréductible, il vient que $\ker(T) = \{0\}$ ou $\ker(T) = \mathcal{V}_1$ et donc, T est injectif ou $T = 0$. Si T est injectif, d'une part, l'image $\operatorname{ran}(T) = \{Tv \,|\, v \in \mathcal{V}_1\}$ est un sous-espace non zéro de $\mathcal{V}_2$. D'autre part, pour tout $A \in G$ et tout $Tv \in \operatorname{ran}(T)$, on a

$$\Pi_2(A)Tv = T\Pi_1(A)v$$

c.-à-d., pour tout $A \in G$, on obtient

$$\Pi_2(A)\operatorname{ran}(T) \subseteq \operatorname{ran}(T).$$

Comme Π_2 est irréductible, on obtient $\operatorname{ran}(T) = \mathcal{V}_2$, c.-à-d., T est également surjectif.

(b) Comme $\mathcal{V}$ est un espace vectoriel complexe, l'application linéaire $T : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ possède une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$. Soit $U_\lambda \subseteq \mathcal{V}$ l'espace propre de T associé à la valeur propre λ (cf. Rap. 1.48). Alors, pour tout $A \in G$ et tout $u \in U_\lambda$, on a

$$T\Pi(A)u = \Pi(A)Tu = \lambda\Pi(A)u,$$

c.-à-d., pour tout $A \in G$, on trouve

$$\Pi(A)U_\lambda \subseteq U_\lambda.$$

Comme $U_\lambda \neq \{0\}$ (un vecteur propre n'est pas zéro, cf. Rap. 1.48), on arrive à $U_\lambda = \mathcal{V}$, c.-à-d., $T = \lambda 1$.

(c) Comme $T_1 \neq 0$, la partie *(a)* implique que $T_1 : \mathcal{V}_1 \to \mathcal{V}_2$ est un isomorphisme (d'espaces vectoriels). Alors, l'application $T_1^{-1} \circ T_2 : \mathcal{V}_1 \to \mathcal{V}_1$ est un opérateur d'entrelacement (de Π_1) et, d'après *(b)*, on obtient $T_1^{-1} \circ T_2 = \lambda 1$ pour un $\lambda \in \mathbb{C}$.

□

On a les corollaires suivants (qui sont également vrais pour les AL).

Corollaire 4.16 *Soit G un GLM, $(G, \mathcal{V}, \Pi)$ une RGL complexe irréductible de G et*

$$\mathcal{Z}(G) := \{A \in G \,|\, AB = BA \text{ pour tout } B \in G\}$$

le **centre** *de G. Alors, pour tout $A \in \mathcal{Z}(G)$, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ t.q. $\Pi(A) = \lambda 1$.*

Démonstration 4.16 Cf. Exr. 26 □

Corollaire 4.17 *Soit G un GLM abélien et $(G, \mathcal{V}, \Pi)$ une RGL complexe irréductible de G. Alors, $\dim(\mathcal{V}) = 1$.*

Démonstration 4.17 Cf. Exr. 27 □

4.4 Somme directe de représentations

Définition 4.18 *Soit G un GLM et, pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$ avec $N \in \mathbb{N}^*$, soient $(G, \mathcal{V}_i, \Pi_i)$ des RGL de G. La RGL $(G, \mathcal{V}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{V}_N, \Pi_1 \oplus \ldots \oplus \Pi_N)$ de G, définie, pour tout $A \in G$ et tout $v_i \in \mathcal{V}_i$, par*

$$\Pi_1 \oplus \ldots \oplus \Pi_N(A)(v_1, \ldots, v_N) := (\Pi_1(A)v_1, \ldots, \Pi_N(A)v_N),$$

s'appelle la **somme directe** *des RGL $(G, \mathcal{V}_i, \Pi_i)$. La somme directe de RAL est définie de manière analogue.*

Exemple 4.19 *Soit G un GLM et, pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$, soient $(G, \mathcal{V}_i, \Pi_i)$ des RGL de G. Alors, leur somme directe est une RGL.*

Démonstration 4.19 Cf. Exr. 28 □

Une propriété importante que possédent certains GLM est la suivante.

Définition 4.20 *Soit G un GLM. Une RGL de G s'appelle* **complètement réductible** *si elle est équivalente à une somme directe d'un nombre fini de RGL irréductible de G. Un GLM G s'appelle* **complètement réductible** *si toute RGL de G est complètement réductible.*

Les représentations suivantes sont complètement réductibles.

Proposition 4.21 *Soit G un GLM et $(G, \mathcal{V}, \Pi)$ une RGL unitaire de G. Alors, Π est complètement réductible.*

Démonstration 4.21 Si Π est irréductible, on obtient l'énoncé. Si Π n'est pas irréductible, il existe un sous-espace vectoriel invariant W de $\mathcal{V}$ t.q. $W \neq \{0\}$ et $W \neq \mathcal{V}$. Alors, son complémentaire orthogonal $W^\perp := \{v \in \mathcal{V} \,|\, \langle v, w \rangle = 0$ pour tout $w \in W\}$ est également invariant sous l'action de Π parce que, pour tout $v \in W^\perp$ et tout $w \in W$, on a

$$\langle \Pi(A)v, w \rangle = \langle v, \Pi(A)^* w \rangle = \langle v, \Pi(A)^{-1} w \rangle = \langle v, \underbrace{\Pi(A^{-1})w}_{\in W} \rangle = 0.$$

Comme $\mathcal{V} = W \oplus W^\perp$ et comme W et $W^\perp$ sont invariants, il vient que la restriction de Π à W, notée Π_W, et la restriction de Π à $W^\perp$, notée $\Pi_{W^\perp}$, sont respectivement des RGL unitaires (G, W, Π_W) et $(G, W^\perp, \Pi_{W^\perp})$, c.-à-d., on a $\Pi = \Pi_W \oplus \Pi_{W^\perp}$. En itérant cet argument pour Π_W et $\Pi_{W^\perp}$, on arrive à l'énoncé parce que $\dim(\mathcal{V}) < \infty$ (à un moment ou un autre, on obtient une RGL irréductible de dimension plus grand que 1 ou une RGL de dimension 1). $\square$

On peut également montrer le résultat important suivant.

Proposition 4.22 *Soit G un GLM compact. Alors, G est complètement réductible.*

Rappels

Rappel 4.23 *Pour $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$, le* **symbole de Levi-Cività** *est défini par*

$$\varepsilon_{ijk} := \begin{cases} 1, & \text{si } (ijk) \text{ est une permutation paire de } (123), \\ -1, & \text{si } (ijk) \text{ est une permutation impaire de } (123), \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

5 Représentations irréductibles de $\mathrm{SU}(2)$

Dans ce chapitre, nous allons appliquer la théorie développée jusqu'ici au GLM $\mathrm{SU}(2)$.

5.1 Construction de représentations de $\mathrm{SU}(2)$

Définition 5.1 *Soit $m \in \mathbb{N}$ et $\boxed{\mathcal{V}_m}$ l'espace vectoriel complexe des* **polynômes homogènes en deux variables complexes** $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ **de degré total** m*, c.-à-d., tout $p \in \mathcal{V}_m$ s'écrit comme*

$$p(z_1, z_2) = \sum_{i=0}^{m} c_i z_1^{m-i} z_2^i,$$

où $c_i \in \mathbb{C}$ pour tout $i \in \{0, \dots, m\}$.

On peut alors construire les représentations suivantes.

Proposition 5.2 *Pour tout $m \in \mathbb{N}$, l'application $\Pi_m : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{GL}(\mathcal{V}_m)$, définie, pour tout $A \in \mathrm{SU}(2)$ et tout $z := (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, par*

$$\boxed{\Pi_m(A)p(z) := p(A^* z),}$$

est une RGL complexe de $\mathrm{SU}(2)$ de dimension $m + 1$.

Démonstration 5.2 Nous commençons par vérifier que $\Pi_m(A)\mathcal{V}_m \subseteq \mathcal{V}_m$ pour tout $A \in \mathrm{SU}(2)$. Pour ce faire, nous allons utiliser Exr. 2 qui nous dit que, pour tout $A \in \mathrm{SU}(2)$, il existe des nombres $a, b \in \mathbb{C}$ avec $|a|^2 + |b|^2 = 1$ t.q. $A = \begin{bmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{bmatrix}$. Il en découle que, pour tout $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, on obtient

$$\begin{aligned}
\Pi_m(A)p(z) &= p\left(\begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}\right) \\
&= p(\bar{a}z_1 + \bar{b}z_2, -bz_1 + az_2) \\
&= \sum_{i=0}^{m} c_i (\bar{a}z_1 + \bar{b}z_2)^{m-i} (-bz_1 + az_2)^i \\
&= \sum_{i=0}^{m} c_i \sum_{j=0}^{m-i} \binom{m-i}{j} (\bar{a}z_1)^{m-i-j} (\bar{b}z_2)^j \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} (-bz_1)^{i-k} (az_2)^k,
\end{aligned}$$

c.-à-d., on voit que $\Pi_m(A)p \in \mathcal{V}_m$ pour tout $p \in \mathcal{V}_m$. Ensuite, Π_m est un homomorphisme de groupes parce que, pour tout $A, B \in \mathrm{SU}(2)$ et tout $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, on a

$$\Pi_m(A)(\Pi_m(B)p)(z) = (\Pi_m(B)p)(A^* z) = p(B^* A^* z) = p((AB)^* z) = \Pi_m(AB)p(z).$$

Alors, comme Π_m est un homomorphisme de groupes, on obtient également que $\Pi_m(A) \in \mathrm{GL}(\mathcal{V}_m)$ pour tout $A \in \mathrm{SU}(2)$. Finalement, comme p est un polynôme, Π_m est continu. Alors, $\mathcal{V}_m$ étant un espace vectoriel complexe de dimension $m+1$, nous arrivons à l'énoncé. $\square$

La RAL associée à Π_m a la forme suivante.

Proposition 5.3 *Soit* $m \in \mathbb{N}$ *et* $(\mathrm{su}(2), \mathcal{V}_m, \pi_m)$ *la RAL associée à la RGL* $(\mathrm{SU}(2), \mathcal{V}_m, \Pi_m)$ *de Prop. 5.2. Alors :*

(a) Pour tout $X = [X_{ij}]_{i,j \in \{1,2\}} \in \mathrm{su}(2)$*, on a*

$$\boxed{\pi_m(X) = -\sum_{i,j=1}^{2} X_{ij} z_j \frac{\partial}{\partial z_i}.}$$

(b) La complexification $(\mathrm{sl}(2,\mathbb{C}), \mathcal{V}_m, \pi_{m,\mathbb{C}})$ *de* π_m *est donnée comme dans (a).*

(c) $\pi_{m,\mathbb{C}}$ *est irréductible.*

Démonstration 5.3

(a) D'après Prop. 4.5, pour tout $X \in \mathrm{su}(2)$ et tout $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, on peut écrire

$$\pi_m(X)p(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \Pi_m(\mathrm{e}^{tX})p(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} p\big(\underbrace{[\mathrm{e}^{tX}]^*}_{=\mathrm{e}^{-tX}} z\big) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} p([\mathrm{e}^{-tX} z]_1, [\mathrm{e}^{-tX} z]_2)$$

$$= \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial p}{\partial z_i}(z)\,[-Xz]_i = -\sum_{i,j=1}^{2} X_{ij} z_j \frac{\partial p}{\partial z_i}(z).$$

(b) Nous savons que $\mathrm{su}(2)$ n'est pas un espace vectoriel complexe (cf. Rem. 2.19 *(a)*) et que sa complexification $\mathrm{su}(2)_{\mathbb{C}}$ a la propriété (cf. Prop. 2.40 et Exr. 21)

$$\mathrm{su}(2)_{\mathbb{C}} \cong \mathrm{sl}(2,\mathbb{C}) = \{A \in \mathrm{Mat}(2,\mathbb{C}) \,|\, \mathrm{tr}(X) = 0\}.$$

En plus, d'après Prop. 4.8 *(a)*, comme $(\mathrm{su}(2), \mathcal{V}_m, \pi_m)$ est une RAL complexe, elle possède une complexification $(\mathrm{sl}(2,\mathbb{C}), \mathcal{V}_m, \pi_{m,\mathbb{C}})$ donnée, pour tout $X, Y \in \mathrm{su}(2)$, par

$$\pi_{m,\mathbb{C}}(\underbrace{X + \mathrm{i}Y}_{\cong (X,Y)}) = \pi_m(X) + \mathrm{i}\pi_m(Y) = -\sum_{i,j=1}^{2} X_{ij} z_j \frac{\partial}{\partial z_i} - \mathrm{i}\sum_{i,j=1}^{2} Y_{ij} z_j \frac{\partial}{\partial z_i}$$

$$= -\sum_{i,j=1}^{2} (X_{ij} + \mathrm{i}Y_{ij}) z_j \frac{\partial}{\partial z_i}.$$

(c) Soit $W \neq \{0\}$ un sous-espace vectoriel complexe de $\mathcal{V}_m$ t.q. $\pi_{m,\mathbb{C}}(Z)W \subseteq W$ pour tout $Z \in \mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$, et soit $w \in W$ de la forme

$$w(z_1, z_2) = \sum_{i=i_0}^{m} c_i z_1^{m-i} z_2^{i},$$

où $i_0 \in \{0, \ldots, m\}$ est le plus petit indice t.q. $c_{i_0} \neq 0$. Nous commençons par noter les propriétés suivantes.

Lemme 5.4 *Soient $X, Y, H \in \mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ définis par*

$$X := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad H := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Alors, pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ et tout $i \in \{0, \ldots, m\}$, on a

$$\begin{aligned} \pi_{m,\mathbb{C}}(X) z_1^{m-i} z_2^i &= -(m-i) z_1^{m-i-1} z_2^{i+1}, \\ \pi_{m,\mathbb{C}}(Y) z_1^{m-i} z_2^i &= -i z_1^{m-i+1} z_2^{i-1}, \\ \pi_{m,\mathbb{C}}(H) z_1^{m-i} z_2^i &= -(m-2i) z_1^{m-i} z_2^i. \end{aligned}$$

Démonstration 5.4 Cf. Exr. 29 □

En utilisant Lem. 5.4, nous calculons

$$\pi_{m,\mathbb{C}}(X)^{m-i_0} z_1^{m-i_0} z_2^{i_0} = (-1)^{m-i_0} (m-i_0)!\, z_2^m,$$

d'où nous obtenons que

$$\begin{aligned} \pi_{m,\mathbb{C}}(X)^{m-i_0} w(z_1, z_2) &= \sum_{i=i_0}^{m} c_i \pi_{m,\mathbb{C}}(X)^{m-i_0} z_1^{m-i} z_2^i \\ &= c_{i_0} (-1)^{m-i_0} (m-i_0)!\, z_2^m + \sum_{i=i_0+1}^{m} c_i \underbrace{\pi_{m,\mathbb{C}}(X)^{m-i_0} z_1^{m-i} z_2^i}_{=0}, \end{aligned}$$

c.-à-d., $\pi_{m,\mathbb{C}}(X)^{m-i_0} w(z_1, z_2)$ est un multiple non zéro de z_2^m. Alors, comme W est invariant sous l'action de $\pi_{m,\mathbb{C}}(X)$, il vient que

$$z_2^m \in W.$$

Ensuite, utilisant de nouveau Lem. 5.4, il en résulte que, pour tout $i \in \{0, \ldots, m\}$,

$$\pi_{m,\mathbb{C}}(Y)^{m-i} z_2^m = (-1)^{m-i} \frac{m!}{i!}\, z_1^{m-i} z_2^i,$$

c.-à-d., $\pi_{m,\mathbb{C}}(Y)^{m-i} z_2^m$ est un multiple non zéro de $z_1^{m-i} z_2^i$ pour tout $i \in \{0, \ldots, m\}$. Comme W est également invariant sous l'action de $\pi_{m,\mathbb{C}}(Y)$, nous trouvons finalement que, pour tout $i \in \{0, \ldots, m\}$,

$$z_1^{m-i} z_2^i \in W.$$

Comme $\{z_1^{m-i} z_2^i\}_{i=0}^m$ constitue une base de $\mathcal{V}_m$, nous obtenons à $W = \mathcal{V}_m$. Alors, $\pi_{m,\mathbb{C}}$ est une RAL irréductible de $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$.

□

5.2 Représentations irréductibles de $\mathrm{su}(2)$

Dans cette section, nous déterminerons la totalité des RAL complexes irréductibles de $\mathrm{su}(2)$. Ce calcul est important pour au moins les trois raisons suivantes. Premièrement, comme $\mathrm{su}(2)$ est isomorphe à $\mathrm{so}(3)$ (cf. Prop. 5.13 ci-dessous), ces RAL sont importantes en physique. Deuxièmement, la théorie des RAL de $\mathrm{su}(2)$ est un exemple instructif de l'utilisation des relations de commutations pour déterminer les RAL d'une AL. Troisièmement, ces RAL sont utilisées dans la détermination des RAL des AL dites semi-simples (sujet que nous n'aurons plus le temps d'aborder dans ce cours).
D'après Prop. 4.8 *(a)*, toute RAL complexe π de $\mathrm{su}(2)$ possède un prolongement unique par une RAL $\pi_{\mathbb{C}}$ de la complexification $\mathrm{su}(2)_{\mathbb{C}} \cong \mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ de $\mathrm{su}(2)$ (cf. aussi Prop. 5.3). En outre, $\pi_{\mathbb{C}}$ est irréductible ssi π est irréductible (cf. Prop. 4.8 *(b)*). Pour déterminer les RAL irréductibles de $\mathrm{su}(2)$, nous pouvons donc aussi bien étudier les RAL irréductibles de $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$. L'étude de l'AL complexifiée rend les calculs plus simples, notamment grâce à l'existence de bases convenables dans $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ qui sont absentes dans $\mathrm{su}(2)$. Une telle base est la suivante.

Lemme 5.5 *Soient $X, Y, H \in \mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ les matrices définies dans Lem. 5.4, c.-à-d.,*

$$H = \sigma_3, \quad X = \tfrac{1}{2}(\sigma_1 + \mathrm{i}\sigma_2), \quad Y = \tfrac{1}{2}(\sigma_1 - \mathrm{i}\sigma_2).$$

(a) $\{X, Y, H\}$ *est une base de* $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$*.*

(b) $[H,X] = 2X$*,* $[H,Y] = -2Y$ *et* $[X,Y] = H$

(c) *Soit $\mathcal{V}$ un espace vectoriel complexe de dimension finie et $A, B, C \in \mathrm{gl}(\mathcal{V})$ t.q.*

$$[A,B] = 2B, \quad [A,C] = -2C, \quad [B,C] = A.$$

Alors, l'application $\pi : \mathrm{sl}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{gl}(\mathcal{V})$, définie par $\pi(H) := A$, $\pi(X) := B$ et $\pi(Y) := C$ (et prolongée de manière linéaire complexe sur la totalité de $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$), est une RAL complexe de $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$.

Démonstration 5.5 Cf. Exr. 30 □

A présent, nous arrivons au théorème principal de ce chapitre.

Théorème 5.6

(a) *Pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe une RAL complexe irréductible de $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ de dimension $m+1$.*

(b) *Deux RAL complexes irréductibles de $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ ayant la même dimension sont équivalentes.*

(c) *Si π est une RAL complexe irréductible de $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ de dimension $m+1$, alors π est équivalent à $\pi_{m,\mathbb{C}}$ de Prop. 5.3.*

Démonstration 5.6 Soit $\mathcal{V}$ un espace vectoriel complexe de dimension finie et $(\mathrm{sl}(2,\mathbb{C}), \mathcal{V}, \pi)$ une RAL complexe irréductible de $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$.

La stratégie de la démonstration consiste à diagonaliser $\pi(H)$. Pour pouvoir faire cela, nous allons utiliser le lemme clé suivant.

Lemme 5.7 *Soit $u \in \mathcal{V}$ un vecteur propre de $\pi(H) \in \mathrm{gl}(\mathcal{V})$ associé à la valeur propre $\alpha \in \mathbb{C}$. Alors, on a*

$$\pi(H)\pi(X)u = (\alpha + 2)\pi(X)u,$$

c.-à-d., $\pi(X)u = 0$ ou $\pi(X)u$ est un vecteur propre de $\pi(H)$ associé à la valeur propre $\alpha + 2$. De la même façon, on a

$$\pi(H)\pi(Y)u = (\alpha - 2)\pi(Y)u,$$

c.-à-d., $\pi(Y)u = 0$ ou $\pi(Y)u$ est un vecteur propre de $\pi(H)$ associé à la valeur propre $\alpha - 2$.

Démonstration 5.7 Cf. Exr. 31 □

On appelera $\pi(X)$ **opérateur de création** et $\pi(Y)$ **opérateur d'annihilation** (ces opérateurs sont également appelés **opérateurs d'échelle**). D'après Lem. 5.7, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\pi(H)\pi(X)^n u = (\alpha + 2n)\pi(X)^n u,$$

c.-à-d., $\pi(X)^n u = 0$ ou $\pi(X)^n u$ est un vecteur propre de $\pi(H)$ associé à la valeur propre $\alpha + 2n$. Comme un opérateur sur un espace vectoriel de dimension finie ne peut avoir qu'un nombre fini de valeurs propres, il existe $N \in \mathbb{N}$ t.q. $\pi(X)^N u \neq 0$ et $\pi(X)^{N+1} u = 0$, c.-à-d., en posant $u_0 := \pi(X)^N u \neq 0$ et $\lambda := \alpha + 2N$, on peut écrire

$$\pi(H)u_0 = \lambda u_0, \tag{19}$$
$$\pi(X)u_0 = 0. \tag{20}$$

En outre, nous posons $u_i := \pi(Y)^i u_0$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Alors, d'après Lem. 5.7, pour tout $i \in \mathbb{N}$, on peut écrire

$$\pi(H)u_i = \pi(H)\pi(Y)^i u_0 \overset{\text{Lem. 5.7}}{=} (\lambda - 2i)\pi(Y)^i u_0 = (\lambda - 2i)u_i. \tag{21}$$

Comme $\pi(H)$ n'a qu'un nombre fini de valeurs propres, (21) implique qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ t.q. $u_m \neq 0$ (c.-à-d., $u_i = \pi(Y)^i u_0 \neq 0$ pour tout $i \in \{0, \ldots, m\}$) et $u_{m+1} = 0$. En plus, on a le lemme suivant.

Lemme 5.8 *Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$\pi(X)u_i = i(\lambda - i + 1)\, u_{i-1}. \tag{22}$$

Démonstration 5.8 Cf. Exr. 32 □

Alors, d'après (22), on trouve $0 = \pi(X)u_{m+1} = (m+1)(\lambda - m)u_m$, d'où on obtient $\lambda = m$. Jusqu'ici, nous avons donc trouvé que, pour toute RAL complexe $(\mathrm{sl}(2,\mathbb{C}), \mathcal{V}, \pi)$ de dimension finie (l'irréductibilité n'a pas encore été utilisée), il existe $m \in \mathbb{N}$ et des vecteurs non nuls $u_0, \ldots, u_m \in \mathcal{V}$ t.q.

$$\begin{cases} \pi(H)u_i = (m-2i)u_i \text{ pour tout } i \in \{0, \ldots, m\}, \\ \pi(X)u_0 = 0, \\ \pi(X)u_i = i(m-i+1)u_{i-1} \text{ pour tout } i \in \{1, \ldots, m\}, \\ \pi(Y)u_i = u_{i+1} \text{ pour tout } i \in \{0, \ldots, m-1\}, \\ \pi(Y)u_m = 0. \end{cases} \tag{23}$$

Comme $u_0, \ldots, u_m \in \mathcal{V}$ sont des vecteurs propres de $\pi(H)$ associés à des valeurs propres différentes, ils sont linéairement indépendants. En plus, en utilsant (23) et le fait que $\{H, X, Y\}$ est une base de $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$, on obtient que, pour tout $Z \in \mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$,

$$\pi(Z)\mathrm{Vect}(u_0, \ldots, u_m) \subseteq \mathrm{Vect}(u_0, \ldots, u_m).$$

Alors, comme π est irréductible, il en résulte que $\mathcal{V} = \mathrm{Vect}(u_0, \ldots, u_m)$.
En résumé :
Pour toute RAL complexe irréductible $(\mathrm{sl}(2,\mathbb{C}), \mathcal{V}, \pi)$ de dimension $m+1$ avec $m \in \mathbb{N}$, il existe une base $\{u_i\}_{i=0}^m$ de $\mathcal{V}$ qui satisfait (23).
A présent, nous allons démontrer les énoncés *(a)*, *(b)* et *(c)*.

(a) Une telle représentation est donnée dans Prop. 5.3 *(c)*.

(b) Soient $(\mathrm{sl}(2,\mathbb{C}), \mathcal{V}, \pi)$ et $(\mathrm{sl}(2,\mathbb{C}), \mathcal{V}', \pi')$ deux RAL complexes irréductibles de $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ t.q. $\dim(\mathcal{V}) = \dim(\mathcal{V}') = m+1$ pour un $m \in \mathbb{N}$. Alors, il existe des bases $\{u_i\}_{i=0}^m \subseteq \mathcal{V}$ et $\{u_i'\}_{i=0}^m \subseteq \mathcal{V}'$ qui ont les propriétés (23). Soit l'opérateur $T : \mathcal{V} \to \mathcal{V}'$ défini par $Tu_i := u_i'$ pour tout $i \in \{0, \ldots, m\}$ (et prolongé de façon linéaire sur la totalité de $\mathcal{V}$). Il en résulte que T est un opérateur d'entrelacement inversible parce que, pour tout $i \in \{0, \ldots, m\}$, on a

$$T\pi(H)u_i = (m-2i)Tu_i = (m-2i)u_i' = \pi'(H)u_i' = \pi'(H)Tu_i,$$

et de manière analogue pour $\pi(X)u_i$ et $\pi(Y)u_i$. Il en résulte que $T\pi(Z)v = \pi'(Z)Tv$ pour tout $Z \in \mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ et tout $v \in \mathcal{V}$.

(c) Cet énoncé est une conséquence directe de *(b)* et de Prop. 5.3 *(c)*.

□

Remarque 5.9

(a) *Nous notons que, au cours de la Dém. 5.6, nous avons également montré que toute valeur propre α de $\pi(H)$ doit satisfaire $\alpha \in \mathbb{Z}$.*

(b) *Nous pouvons également montré l'énoncé suivant.*

Proposition 5.10 *Soit $\mathcal{V}$ un espace vectoriel complexe muni d'une base $\{u_i\}_{i=0}^{m}$ et soit $\pi : \mathrm{sl}(2, \mathbb{C}) \to \mathrm{gl}(\mathcal{V})$ une application linéaire complexe définie par* (23) *(et prolongée de façon linéaire sur la totalité de $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$). Alors, $(\mathrm{sl}(2, \mathbb{C}), \mathcal{V}, \pi)$ est une RAL complexe irréductible de $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ de dimension $m + 1$.*

Démonstration 5.10 *Cf. Exr. 33* $\square$

(c) *D'après Prop. 1.31, le GLM* $\mathrm{SU}(2)$ *est simplement connexe. Alors, les RGL de* $\mathrm{SU}(2)$ *sont en correspondance bijective avec les RAL de* $\mathrm{su}(2)$ *(cf. Thm. 2.21 et Thm. 3.6). En plus, les RAL de* $\mathrm{su}(2)$ *sont en correspondance bijective avec les RAL de la complexification* $\mathrm{su}(2)_{\mathbb{C}} \cong \mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ *(cf. Prop. 4.8). Finalement, toute RGL de* $\mathrm{SU}(2)$ *est irréductible ssi son RAL associée de* $\mathrm{su}(2)$ *est irréductible (cf. Prop. 4.6), et cette dernière est irréductible ssi la complexification de celle-ci est irréductible (cf. Prop. 4.8).*

En résumé :

Il existe une correspondance bijective entre les RGL complexes Π *de* $\mathrm{SU}(2)$ *et les RAL complexes* π *de* $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$*. Cette correspondance est déterminée par la propriété que, pour tout* $X \in \mathrm{su}(2) \subset \mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$*,*

$$\Pi(\mathrm{e}^X) = \mathrm{e}^{\pi(X)}.$$

Π *est irréductible ssi* π *est irréductible.*

(d) *Comme* $\mathrm{SU}(2)$ *est compact (cf. Prop. 1.21 (a)), Prop. 4.22 implique que* $\mathrm{SU}(2)$ *est complètement réductible. Rem. (c) nous fournit alors que toute RAL de* $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ *est isomorphe à une somme directe d'un nombre fini de RAL irréductibles.*

(e) *En ce qui concerne* $\mathrm{SU}(3)$*, la stratégie pour trouver les RAL complexes irréductibles de* $\mathrm{su}(3)_{\mathbb{C}} \cong \mathrm{sl}(3, \mathbb{C})$ *est similaire à celle utilisée pour* $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ *: on diagonalise simultanément* $\pi(H_1)$ *et* $\pi(H_2)$*, où* $H_1, H_2 \in \mathrm{sl}(3, \mathbb{C})$ *sont des éléments d'une base spécifique de* $\mathrm{sl}(3, \mathbb{C})$ *qui commutent entre eux. Les valeurs propres simultanées de* $\pi(H_1)$ *et* $\pi(H_2)$ *s'appellent* **poids** *de la RAL. Les poids de la représentation adjointe de* $\mathrm{sl}(3, \mathbb{C})$ *s'appellent des* **racines***.*

Les **systèmes de racines** sont utilisés dans la classification des AL complexes simples.

Définition 5.11 *Une AL complexe* $\mathfrak{g}$ *s'appelle* **simple** *si* $\dim(\mathfrak{g}) \geq 2$ *et si tout idéal dans* $\mathfrak{g}$ *est égal à* $\mathfrak{g}$ *ou à* $\{0\}$*. Une sous-algèbre de Lie complexe* $\mathfrak{h}$ *de* $\mathfrak{g}$ *s'appelle un* **idéal** *de* $\mathfrak{g}$ *si* $[X, H] \in \mathfrak{h}$ *pour tout* $X \in \mathfrak{g}$ *et tout* $H \in \mathfrak{h}$*.*

On peut alors montrer la classification suivante.

Théorème 5.12 *Toute AL complexe simple est isomorphe à une unique AL de la liste suivante :*

(a) $\mathrm{sl}(d+1, \mathbb{C})$ *pour* $d \geq 1$

(b) $\mathrm{so}(2d+1, \mathbb{C})$ *pour* $d \geq 2$

(c) $\mathrm{sp}(d, \mathbb{C})$ *pour* $d \geq 3$

(d) $\mathrm{so}(2d, \mathbb{C})$ *pour* $d \geq 4$

(e) *Les AL* **exceptionnelles** G_2*,* F_4*,* E_6*,* E_7 *et* E_8 *(respectivement de dimension* 14*,* 52*,* 78*,* 133 *et* 248*).*

5.3 Représentations de groupes vs. représentations d'algèbres de Lie

Nous savons de Thm. 2.21 que toute RGL d'un GLM G engendre une RAL de $\mathrm{Lie}(G)$. Inversement, Thm. 3.6 nous dit que, si G est simplement connexe, toute RAL de $\mathrm{Lie}(G)$ engendre une RGL de G. Alors, si G est simplement connexe, il existe une correspondance bijective entre les RGL de G et les RAL de $\mathrm{Lie}(G)$ (cf. Rem. 5.9 *(c)*).

Par contre, si G n'est pas simplement connexe, il peut y avoir des RAL de $\mathrm{Lie}(G)$ qui n'ont pas de RGL associés de G.

Il est instructif d'étudier cette question dans le cas de $\mathrm{SU}(2)$ (qui est simplement connexe) et de $\mathrm{SO}(3)$ (qui ne l'est pas). En ce qui concerne $\mathrm{SU}(2)$, nous avons montré dans Thm. 5.6 que toute RAL complexe irréductible de (la complexification de) $\mathrm{su}(2)$ est équivalente à (la complexification de) la RAL π_m de Prop. 5.3 pour un $m \in \mathbb{N}$.
Mais toute RAL π_m a été construite comme la RAL associée à la RGL Π_m de $\mathrm{SU}(2)$ de Prop. 5.2, c.-à-d., toute RAL complexe irréductible de $\mathrm{su}(2)$ est engendrée par une RGL de $\mathrm{SU}(2)$. Ceci illustre la correspondance bijective dans le cas du GLM simplement connexe $\mathrm{SU}(2)$.

Comment la situation se présente-t-elle pour $\mathrm{SO}(3)$ qui n'est pas simplement connexe ?

Nous commençons par l'énoncé suivant.

Proposition 5.13

(a) Les matrices $\{F_1, F_2, F_3\} \subseteq \mathrm{Mat}(2, \mathbb{C})$*, définies par* $F_i := (-1)^{i+1}\frac{\mathrm{i}}{2}\,\sigma_i$ *pour tout* $i \in \{1, 2, 3\}$*, constituent une base de* $\mathrm{su}(2)$*.*

(b) Les constantes de structure de $\mathrm{su}(2)$ *(p.r. à la base* $\{F_1, F_2, F_3\}$*) sont données par les symboles de Levi-Cività, c.-à-d., pour tout* $i, j \in \{1, 2, 3\}$*, on a*

$$[F_i, F_j] = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} F_k.$$

(c) Soit $\{E_1, E_2, E_3\}$ *la base de* $\mathrm{so}(3)$ *définie dans Ex. 4.14 (a). Alors, l'application* $\varphi : \mathrm{su}(2) \to \mathrm{so}(3)$*, définie par* $\varphi(F_i) := E_i$ *pour tout* $i \in \{1, 2, 3\}$ *(et prolongée de manière linéaire sur la totalité de* $\mathrm{su}(2)$*), est un IAL, c.-à-d., on a*

$$\boxed{\mathrm{su}(2) \cong \mathrm{so}(3).}$$

Démonstration 5.13 Cf. Exr. 34 □

Remarque 5.14 *Soit* $\varphi : \mathrm{su}(2) \to \mathrm{so}(3)$ *un IAL (un tel IAL existe toujours grâce à Prop. 5.13 (c)). Alors, pour toute RAL* $(\mathrm{su}(2), \mathcal{V}, \pi)$ *de* $\mathrm{su}(2)$ *sur l'espace vectoriel* $\mathcal{V}$ *sur* $\mathbb{K}$*, le triplet* $(\mathrm{so}(3), \mathcal{V}, \pi \circ \varphi^{-1})$ *est une RAL de* $\mathrm{so}(3)$*, c.-à-d., on a le diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{su}(2) \arrow[dr, "\pi"'] & \mathrm{so}(3) \arrow[l, "\varphi^{-1}"'] \arrow[d] \\ & \mathrm{gl}(\mathcal{V}) \end{tikzcd}$$

Notamment, toute RAL complexe irréductible de $\mathrm{so}(3)$ est de la forme $\pi_m \circ \varphi^{-1}$ pour un $m \in \mathbb{N}$, où π_m est donné dans Prop. 5.3 *(a)*. Alors, pour un $m \in \mathbb{N}$ donné, existe-t-il une RGL de $\mathrm{SO}(3)$ associée à la RAL $\pi_m \circ \varphi^{-1}$ de $\mathrm{so}(3)$? La réponse est la suivante.

Proposition 5.15 *Soit $\varphi : \mathrm{su}(2) \to \mathrm{so}(3)$ l'IAL de Prop. 5.13 (c) et soit $\theta_m := \pi_m \circ \varphi^{-1}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Alors :*

(a) Si m est pair, il existe une RGL Θ_m de $\mathrm{SO}(3)$ associée à θ_m.

(b) Si m est impair, il n'existe pas de RGL Θ_m de $\mathrm{SO}(3)$ associée à θ_m.

Remarque 5.16 *En général, si m est impair, la définition de Θ_m dans l'Etape 4 de Dém. 3.6 n'est pas indépendante du chemin choisi.*

Démonstration 5.15

(a) Soit Π_m la RGL de $\mathrm{SU}(2)$ de Prop. 5.2. Alors, comme $\Pi_m(-1) = (-1)^m 1$, on trouve que, pour tout $A \in \mathrm{SU}(2)$,

$$\Pi_m(-A) = \Pi_m(-1)\Pi_m(A) = \Pi_m(A),$$

où nous avons utilisé que m est pair. Par la suite, nous allons utiliser le lemme suivant.

Lemme 5.17 *Il existe un HGL $\Phi : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$ qui a les propriétés suivantes :*

(a) Φ est le HGL associé à l'IAL $\varphi : \mathrm{su}(2) \to \mathrm{so}(3)$ de Prop. 5.13 (c).

(b) Φ est surjectif.

(c) $\ker(\Phi) = \{-1, 1\}$ *(cf. Rap. 5.18)*

Démonstration 5.17 Cf. Exr. 35 □

D'après Lem. 5.17 *(b)*, pour tout $B \in \mathrm{SO}(3)$, il existe $A \in \mathrm{SU}(2)$ t.q. $B = \Phi(A)$. En plus, d'après Lem. 5.17 *(c)*, tout $A' \in \mathrm{SU}(2)$ t.q. $B = \Phi(A')$ satisfait $A' = \pm A$. Il en résulte que, si on définit une RGL Θ_m de $\mathrm{SO}(3)$ pour tout $B \in \mathrm{SO}(3)$ par

$$\Theta_m(B) := \Pi_m(A),$$

où $A \in \mathrm{SU}(2)$ est t.q. $B = \Phi(A)$, alors Θ_m est bien défini parce que $\Pi_m(-A) = \Pi_m(A)$ et parce que l'ensemble des antécédents de B par Φ est $\{\pm A\}$. On peut donc écrire

$$\Pi_m = \Theta_m \circ \Phi.$$

Alors, si θ_m est la RAL associée à Θ_m, Exr. 17 implique que

$$\pi_m = \theta_m \circ \varphi,$$

et donc, Θ_m est la RGL de $\mathrm{SO}(3)$ associée à $\theta_m = \pi_m \circ \varphi^{-1}$.

(b) Supposons qu'il existe une RGL Θ_m associée à la RAL θ_m. Alors, comme $\mathrm{e}^{2\pi E_3} = 1$ (où E_3 est défini dans Ex. 4.14 *(a)*), on a, d'une part,

$$\Theta_m(\mathrm{e}^{2\pi E_3}) = 1. \tag{24}$$

D'autre part, il faudrait également que $\Theta_m(\mathrm{e}^{2\pi E_3}) = \mathrm{e}^{2\pi\theta_m(E_3)}$. Comme $\theta_m(E_3) = \pi_m(\varphi^{-1}(E_3)) = \pi_m(F_3)$, et comme, d'après (23) de Dém. 5.6, il existe une base de $\mathcal{V}_m$ consistant en vecteurs propres $\{u_i\}_{i=0}^m$ de $\pi_m(H) = -2\mathrm{i}\pi_m(F_3)$ associés aux valeurs propres $m - 2i$ (toutes les notations sont comme dans Dém. 5.6), on a $2\pi\pi_m(F_3)u_i = \mathrm{i}\pi(m-2i)u_i$ pour tout $i \in \{0, \ldots, m\}$. Alors, p.r. à cette base, on peut écrire $2\pi\pi_m(F_3) = \mathrm{i}\pi\mathrm{diag}[m, m-2, \ldots, -m]$ d'où

$$\mathrm{e}^{2\pi\theta_m(E_3)} = \mathrm{diag}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi m}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi(m-2)}, \ldots, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi m}] = -1,$$

où nous avons utilisé que m est impair. Ceci contredit (24).

□

Rappels

Rappel 5.18 *Soient G et H des groupes, $\Phi : G \to H$ un homomorphisme de groupes et soit e_H l'identité de H. L'ensemble $\ker(\Phi) := \{g \in G \mid \Phi(g) = e_H\}$ s'appelle le* **noyau** *de Φ.*

(Da Capo al) Fine.

Voici quelques références qui ont été utilisées pour la rédaction de ce cours, la référence principale étant la première partie de [3].

Références

[1] Barut A O and Raczka R 1980 *Theory of group representations and applications* (PWN – Polish Scientific Publishers)

[2] Cornwell J F 1994 *Group Theory in Physics I/II* Techniques in Physics 7 (Academic Press)

[3] Hall B C 2003 *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations – An Elementary Introduction* Graduate Texts in Mathematics 222 (Springer)

[4] Humphreys J E 1997 *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory* Graduate Texts in Mathematics 9 (Springer)