UNIVERSITÉ DE TOULON
UFR Sciences et Techniques

Initiation à la recherche

W. Aschbacher **M74 M1** Cours du 1er semestre 2014 – 2015 *Master Mathématiques*

Examen du 12/01/2015 (Contrôle terminal)
Durée : 120 minutes
Moyens autorisés : Un aide-mémoire constitué d'une seule feuille A4 recto-verso

---

Questions à choix multiple

Nota bene : Un point n'est accordé que si, pour chaque question, tous les items sont correctement cochés. Il n'y aura pas de demi-points ou de points négatifs.

Lesquels des énoncés suivants sont justes ?

Question 1. [1.0] Soit G un GLM et $X \in \mathrm{Lie}(G)$.
☒ $\mathrm{e}^X \in G$
☐ $\log(X) \in G$
☐ $X^2 \in G$

Solution
☒ Déf. 2.15
☐ *Contrexemple* : Pour $X = 1 \in \mathrm{gl}(d, \mathbb{C})$, on a $\log(X) = 0 \notin \mathrm{GL}(d, \mathbb{C})$.
☐ *Contrexemple* : Pour $X = 0 \in \mathrm{gl}(d, \mathbb{C})$, on a $X^2 = 0 \notin \mathrm{GL}(d, \mathbb{C})$. ☐

Question 2. [1.0] Soient G et H des GLM simplement connexes.
☒ $G \cong H \implies \mathrm{Lie}(G) \cong \mathrm{Lie}(H)$
☒ $\mathrm{Lie}(G) \cong \mathrm{Lie}(H) \implies G \cong H$
☐ Pour tout HAL $\varphi : \mathrm{Lie}(G) \to \mathrm{Lie}(H)$, il existe un HGL $\Phi : G \to H$ t.q. $\Phi(\mathrm{e}^1) = \mathrm{e}^{\varphi(1)}$.

Solution
☒ Prop. 2.22
☒ Prop. 3.7
☐ La formule n'est pas définie parce que, en général, $1 \notin \mathrm{Lie}(G)$ (p.ex. pour $G = \mathrm{SL}(d, \mathbb{C})$).
☐

Question 3. [1.0] Soit $\mathfrak{g}$ une AL réelle et $(\mathfrak{g}, \mathcal{V}, \pi)$ une RAL complexe de $\mathfrak{g}$.

☒ La complexification $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathcal{V}, \pi_{\mathbb{C}})$ est irréductible ssi $(\mathfrak{g}, \mathcal{V}, \pi)$ est irréductible.
☒ $\pi_{\mathbb{C}}$ est l'unique prolongement à $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ de π.
☒ $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ est une AL complexe.

Solution

☒ Prop. 4.8 *(b)*
☒ Prop. 4.8 *(a)*
☒ Prop. 2.38 □

Question 4. [1.0] Afin de classifier les RAL complexes irréductibles $(\mathrm{sl}(2,\mathbb{C}), \mathcal{V}, \pi)$, nous avons utilisé la base $\{X, Y, H\}$ de $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$. Quelle est la stratégie de la démonstration ?

Réponse (courte) :
La stratégie consiste à diagonaliser $\pi(H)$.

Questions ouvertes

Nota bene : Les réponses à toutes les questions sont à justifier. Le barème est donné à titre inidicatif.

Par la suite, nous considérons le **groupe de Heisenberg**,

$$\mathrm{H}(3,\mathbb{R}) = \left\{ A \in \mathrm{Mat}(3,\mathbb{R}) \;\middle|\; A = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_3 \\ 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\},$$

et les matrices $E_1, E_2, E_3 \in \mathrm{Mat}(3,\mathbb{R})$ données par

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Question 5.

(a) [2.0] Montrer que $\mathrm{H}(3,\mathbb{R})$ est un GLM dans $\mathrm{GL}(3,\mathbb{C})$.

(b) [4.0] Soit $\mathrm{h}(3,\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel réel de $\mathrm{Mat}(3,\mathbb{C})$ engendré par le sous-ensemble $\{E_1, E_2, E_3\}$ de $\mathrm{Mat}(3,\mathbb{C})$. Montrer que $\mathrm{h}(3,\mathbb{R}) = \mathrm{Lie}(\mathrm{H}(3,\mathbb{R}))$.

Solution

(a) Nous vérifions les deux axiomes *(GL1)* et *(GL2)* de Déf. 1.6 :

(GL1) : $\mathrm{H}(3,\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(3,\mathbb{C})$ parce que $\det(A) = 1 \neq 0$ pour tout $A \in \mathrm{H}(3,\mathbb{R})$ et $1 \in \mathrm{H}(3,\mathbb{R})$ (c.-à-d., $\mathrm{H}(3,\mathbb{R})$ est un sous-ensemble non vide de $\mathrm{GL}(3,\mathbb{C})$) et parce que, pour tout $A, B \in \mathrm{H}(3,\mathbb{R})$, on a

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & a_1+b_1 & a_3+b_3+a_1b_2 \\ 0 & 1 & a_2+b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{H}(3,\mathbb{R}), \tag{1}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -a_1 & a_1a_2-a_3 \\ 0 & 1 & -a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{H}(3,\mathbb{R}).$$

(GL2) : Soit A_n une suite dans $\mathrm{H}(3,\mathbb{R})$ qui converge vers $A \in \mathrm{Mat}(3,\mathbb{C})$. En utilisant la forme de A_n, on a $A \in \mathrm{H}(3,\mathbb{R})$.

(b) Le sous-espace vectoriel réel de $\mathrm{Mat}(3,\mathbb{C})$ engendré par le sous-ensemble $\{E_1, E_2, E_3\}$ de $\mathrm{Mat}(3,\mathbb{C})$ a la forme

$$\mathrm{h}(3,\mathbb{R}) = \left\{ X \in \mathrm{Mat}(3,\mathbb{R}) \,\middle|\, X = \begin{bmatrix} 0 & x_1 & x_3 \\ 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

$\mathrm{h}(3,\mathbb{R}) \subseteq \mathrm{Lie}(\mathrm{H}(3,\mathbb{R}))$:

D'après Déf. 2.15, il faut montrer que $\mathrm{e}^{tX} \in \mathrm{H}(3,\mathbb{R})$ pour tout $X \in \mathrm{h}(3,\mathbb{R})$ et tout $t \in \mathbb{R}$. Soit donc $X \in \mathrm{h}(3,\mathbb{R})$ et $t \in \mathbb{R}$. Alors, comme X est nilpotent d'indice 3 (c.-à-d., $X^3 = 0$ mais, en général, $X^2 \neq 0$), on obtient

$$\mathrm{e}^{tX} = 1 + tX + \frac{t^2}{2}X^2 = \begin{bmatrix} 1 & tx_1 & tx_3 + \frac{t^2}{2}x_1x_2 \\ 0 & 1 & tx_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in H(3,\mathbb{R}). \tag{2}$$

$\mathrm{h}(3,\mathbb{R}) \supseteq \mathrm{Lie}(H(3,\mathbb{R}))$:

D'après Déf. 2.15, il faut montrer que, pour tout $X \in \mathrm{Mat}(3,\mathbb{C})$ t.q. $\mathrm{e}^{tX} \in \mathrm{H}(3,\mathbb{R})$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $X \in \mathrm{h}(3,\mathbb{R})$. Pour un tel X, on peut écrire

$$\mathrm{e}^{tX} = \begin{bmatrix} 1 & a_1(t) & a_3(t) \\ 0 & 1 & a_2(t) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R},$$

où, d'après Prop. 2.6 *(h)*, nous avons que $a_1, a_2, a_3 \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Il en résulte que

$$X = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \mathrm{e}^{tX} = \begin{bmatrix} 0 & a_1'(0) & a_3'(0) \\ 0 & 0 & a_2'(0) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{h}(3,\mathbb{R}).$$

□

Question 6. Montrer par des calculs directs :

(a) [1.5] $[E_1, E_2] = E_3$, $[E_1, E_3] = 0$ et $[E_2, E_3] = 0$

(b) [3.0] $\mathrm{e}^X \mathrm{e}^Y = \mathrm{e}^{X+Y+\frac{1}{2}[X,Y]}$ pour tout $X, Y \in \mathrm{h}(3, \mathbb{R})$ (**Heisenberg BCH**)

Indication : Utiliser que $\{E_1, E_2, E_3\}$ est une base de $\mathrm{h}(3, \mathbb{R})$.

Solution

(a) Nous avons

$$[E_1, E_2] = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{=E_3} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{=0},$$

et également $[E_1, E_3] = 0$ et $[E_2, E_3] = 0$.

(b) Soient $X, Y \in \mathrm{h}(3, \mathbb{R})$. Comme $\{E_1, E_2, E_3\}$ est une base de $\mathrm{h}(3, \mathbb{R})$, il existe $x_i, y_j \in \mathbb{R}$ t.q. $X = \sum_{i=1}^{3} x_i E_i$ et $Y = \sum_{j=1}^{3} y_j E_j$. Alors, en utilisant *(a)*, nous pouvons calculer

$$[X, Y] = (x_1 y_2 - x_2 y_1) E_3.$$

Ensuite, en utilisant (1) et (2), nous obtenons, d'une part,

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^X \mathrm{e}^Y &= \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_3 + \frac{1}{2} x_1 x_2 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & y_1 & y_3 + \frac{1}{2} y_1 y_2 \\ 0 & 1 & y_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & x_1 + y_1 & x_3 + \frac{1}{2} x_1 x_2 + y_3 + \frac{1}{2} y_1 y_2 + x_1 y_2 \\ 0 & 1 & x_2 + y_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

et, d'autre part, nous avons

$$X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] = \begin{bmatrix} 0 & x_1 + y_1 & x_3 + y_3 + \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1) \\ 0 & 0 & x_2 + y_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

En utilisant (2), nous arrivons alors à

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{X+Y+\frac{1}{2}[X,Y]} &= \begin{bmatrix} 0 & x_1 + y_1 & x_3 + y_3 + \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1) + \frac{1}{2}(x_1 + y_1)(x_2 + y_2) \\ 0 & 0 & x_2 + y_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \mathrm{e}^X \mathrm{e}^Y. \end{aligned}$$

$\square$

Question 7.

(a) [1.0] Montrer que l'application exponentielle $\exp : \mathrm{h}(3,\mathbb{R}) \to \mathrm{H}(3,\mathbb{R})$ est bijective. Nous notons $\lambda : \mathrm{H}(3,\mathbb{R}) \to \mathrm{h}(3,\mathbb{R})$ sa réciproque.

(b) [3.5] Soit G un GLM et $\varphi : \mathrm{h}(3,\mathbb{R}) \to \mathrm{Lie}(G)$ un HAL. Montrer que l'application $\Phi : \mathrm{H}(3,\mathbb{R}) \to G$, définie, pour tout $A \in \mathrm{H}(3,\mathbb{R})$, par

$$\Phi(A) := \mathrm{e}^{\varphi(\lambda(A))},$$

est un HGL.

Indication : Utiliser *(a)* et Question 6 *(b)* pour $\varphi(X)$ et $\varphi(Y)$, c.-à-d., $\mathrm{e}^{\varphi(\lambda(\mathrm{e}^X \mathrm{e}^Y))} = \mathrm{e}^{\varphi(X)}\mathrm{e}^{\varphi(Y)}$ pour tout $X, Y \in \mathrm{h}(3,\mathbb{R})$.

(c) [1.0] Montrer que, pour tout GLM G et tout HAL $\varphi : \mathrm{h}(3,\mathbb{R}) \to \mathrm{Lie}(G)$, il existe un unique HGL $\Phi : \mathrm{H}(3,\mathbb{R}) \to G$ t.q., pour tout $X \in \mathrm{h}(3,\mathbb{R})$, nous avons

$$\Phi(\mathrm{e}^X) = \mathrm{e}^{\varphi(X)}.$$

Solution

(a) *Injectivité :* Soient $X, Y \in h(3,\mathbb{R})$ t.q. $\mathrm{e}^X = \mathrm{e}^Y$. Alors, d'après (2), on trouve $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$ et $x_3 + \frac{1}{2}x_1x_2 = y_3 + \frac{1}{2}y_1y_2$ d'où $X = Y$.
Surjectivité : Soit $A \in \mathrm{H}(3,\mathbb{R})$. Alors, il existe $X \in \mathrm{h}(3,\mathbb{R})$, défini par $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2$ et $x_3 = a_3 - \frac{1}{2}a_1a_2$ t.q. $A = \mathrm{e}^X$ (cf. (2)).

(b) Nous vérifions les deux propriétés de Déf. 1.38.
(HGL1) : D'après *(a)*, tout $A \in \mathrm{H}(3,\mathbb{R})$ peut s'écrire comme $A = \mathrm{e}^X$ pour l'unique $X = \lambda(A)$. Alors, en utilisant les indications, nous calculons

$$\Phi(AB) = \mathrm{e}^{\varphi(\lambda(AB))} \overset{(a)}{=} \mathrm{e}^{\varphi(\lambda(\mathrm{e}^X\mathrm{e}^Y))} \overset{\text{2e indication}}{=} \mathrm{e}^{\varphi(X)}\mathrm{e}^{\varphi(Y)} = \mathrm{e}^{\varphi(\lambda(A))}\mathrm{e}^{\varphi(\lambda(B))} = \Phi(A)\Phi(B).$$

Remarque : En utilisant plus explicitement Question 6 *(b)*, nous pouvons également écire

$$\Phi(AB) \overset{(a)}{=} \Phi(\mathrm{e}^X\mathrm{e}^Y) \overset{\text{Question 6 (b)}}{=} \Phi(\mathrm{e}^{X+Y+\frac{1}{2}[X,Y]}) = \mathrm{e}^{\varphi(X+Y+\frac{1}{2}[X,Y])} = \mathrm{e}^{\varphi(X)+\varphi(Y)+\frac{1}{2}[\varphi(X),\varphi(Y)]}$$
$$\overset{\text{2e indication}}{=} \mathrm{e}^{\varphi(X)}\mathrm{e}^{\varphi(Y)} = \mathrm{e}^{\varphi(\lambda(A))}\mathrm{e}^{\varphi(\lambda(B))} = \Phi(A)\Phi(B).$$

(HGL2) : D'après Prop. 2.4 *(b)*, $\exp$ est continu. En plus, φ est une application linéaire sur un espace vectoriel de dimension finie, alors φ est continue. Finalement, λ est continu parce que, d'après (2), $\exp$ est une application bijective continue ouverte (et donc, un homéomorphisme, cf. le cours d'analyse). Alors, Φ est un HGL.

(c) En substituant e^X pour A dans la formule de *(b)*, nous obtenons $\Phi(\mathrm{e}^X) = \mathrm{e}^{\varphi(X)}$ pour tout $X \in \mathrm{h}(3,\mathbb{R})$. En plus, supposons qu'il existe Ψ t.q. $\Psi(\mathrm{e}^X) = \mathrm{e}^{\varphi(X)}$ pour tout $X \in \mathrm{h}(3,\mathbb{R})$. Alors, on a $\Psi(\mathrm{e}^X) = \Phi(\mathrm{e}^X)$ pour tout $X \in h(3,\mathbb{R})$, c.-à-d., d'après *(a)*, $\Psi(A) = \Phi(A)$ pour tout $A \in H(3,\mathbb{R})$. Alors, Φ est unique.
Remarque : Comme $\mathrm{H}(3,\mathbb{R})$ est simplement connexe, Thm. 3.6 fournit également l'énoncé.

$\square$