UNIVERSITÉ DE TOULON

UFR Sciences et Techniques

Initiation à la recherche

W. Aschbacher **M74 M1** Cours du 1er semestre 2014 – 2015 *Master Mathématiques*

Examen du 18/12/2014 (Contrôle continu)
Durée : 60 minutes
Moyens autorisés : Un aide-mémoire constitué d'une seule feuille A4 recto-verso

---

Questions à choix multiple

Nota bene : Un point n'est accordé que si, pour chaque question, tous les items sont correctement cochés. Il n'y aura pas de demi-points ou de points négatifs.

Question 1. [1.0] Soit G un GLM dans $\mathrm{GL}(d, \mathbb{C})$. Lesquels des énoncés suivants sont justes ?

☐ G est fermé dans $\mathrm{Mat}(d, \mathbb{C})$.
☒ La composante connexe de l'identité G_e est un sous-groupe de G.
☐ $\mathrm{e}^X \in G_e$ pour tout $X \in G$

Solution

☐ Dém. 1.21 *(b)*

☒ Prop. 1.25

☐ *Contrexemple* : Le GLM $\mathrm{SL}(1, \mathbb{C}) = \{1\}$ est connexe (c.-à-d., $\mathrm{SL}(1, \mathbb{C})_e = \mathrm{SL}(1, \mathbb{C})$), mais on a que $\mathrm{e}^1 \notin \mathrm{SL}(1, \mathbb{C})$.

☐

Question 2. [1.0] Soit $\exp : \mathrm{Lie}(G) \to G$ l'application exponentielle. Lesquels des énoncés suivants sont justes ?

☐ Si G est connexe, pour tout $A \in G$, il existe $X \in \mathrm{Lie}(G)$ t.q. $A = \exp(X)$.
☒ $\exp$ est localement inversible.
☐ $\mathrm{e}^{\log(X)} = X$ pour tout $X \in \mathrm{Lie}(G)$

Solution

☐ Exr. 18 *(b)*

☐ Prop. 2.27

☐ *Contrexemple* : $G = \mathrm{GL}(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$ avec $\mathrm{Lie}(G) = \mathrm{gl}(1, \mathbb{C}) = \mathrm{Mat}(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C}$ et Déf. 2.9

$\square$

Question 3. [1.0] Soient G et H des GLM et soit $\varphi : \mathrm{Lie}(G) \to \mathrm{Lie}(H)$ un HAL. Nous avons montré que, si G est simplement connexe, il existe un unique HGL $\Phi : G \to H$ associé à φ. Comment avons-nous utilisé la formule de BCH dans la démonstration de ce théorème ?

Réponse (courte) :
Pour montrer l'indépendance de la définition de Φ de la partition valable choisie d'un chemin donné.

Solution
Cf. *Etape 3* de Dém. 3.6 $\square$

Questions ouvertes

Nota bene : Les réponses à toutes les questions sont à justifier.
Le barème est donné à titre inidicatif.

Question 4. Nous considérons les ensembles

$$\mathrm{SO}(d, \mathbb{C}) = \{A \in \mathrm{GL}(d, \mathbb{C}) \mid A^{-1} = A^T \text{ et } \det(A) = 1\},$$
$$\mathrm{so}(d, \mathbb{C}) = \{X \in \mathrm{Mat}(d, \mathbb{C}) \mid X^T = -X\}.$$

Montrer :

(a) [4.0] $\mathrm{SO}(d, \mathbb{C})$ est un GLM dans $\mathrm{GL}(d, \mathbb{C})$ (le **groupe orthogonal complexe spécial**).

(b) [4.0] $\mathrm{Lie}(\mathrm{SO}(d, \mathbb{C})) = \mathrm{so}(d, \mathbb{C})$

Solution

(a) Nous vérifions les propriétés *(GL1)* et *(GL2)* d'un GLM (cf. Déf. 1.6).
(GL1) Nous vérifions les propriétés *(SG1)* et *(SG2)* d'un sous-groupe (cf. Déf. 1.4). D'abord, comme $1^{-1} = 1^T$ et $\det(1) = 1$, l'ensemble $\mathrm{SO}(d, \mathbb{C})$ est un sous-ensemble non vide de $\mathrm{GL}(d, \mathbb{C})$. Ensuite :
(SG1) Soient $A, B \in \mathrm{SO}(d, \mathbb{C})$. Alors, on a $AB \in \mathrm{GL}(d, \mathbb{C})$ parce que $B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$. En plus, on calcule $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = B^T A^T = (AB)^T$ et $\det(AB) = \det(A)\det(B) = 1$.
(SG2) Soit $A \in \mathrm{SO}(d, \mathbb{C})$. Alors, on a $A^{-1} \in \mathrm{GL}(d, \mathbb{C})$ parce que $A = (A^{-1})^{-1}$. En plus, on calcule $(A^{-1})^{-1} = (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ et $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1} = 1$.
Alors, $\mathrm{SO}(d, \mathbb{C})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(d, \mathbb{C})$.
(GL2) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathrm{SO}(d, \mathbb{C})$ qui converge vers $A \in \mathrm{Mat}(d, \mathbb{C})$. Alors, comme $(A_n)^{-1} = (A_n)^T$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et comme l'inversion et la transposition sont des applications continues, on peut écrire $A^{-1} = (\lim_{n\to\infty} A_n)^{-1} = \lim_{n\to\infty}(A_n)^{-1} = \lim_{n\to\infty}(A_n)^T = (\lim_{n\to\infty} A_n)^T = A^T$.
Ensuite, comme $\det(A_n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et comme le déterminant est également une

application continue, on peut écrire $\det(A) = \det(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \det(A_n) = 1$.
Il en résulte que $A \in \mathrm{SO}(d, \mathbb{C})$.

(b) $\subseteq$: Soit $X \in \mathrm{Lie}(\mathrm{SO}(d, \mathbb{C}))$. Alors, $X \in \mathrm{Mat}(d, \mathbb{C})$ et $\mathrm{e}^{tX} \in \mathrm{SO}(d, \mathbb{C})$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, c.-à-d., $\mathrm{e}^{-tX} = (\mathrm{e}^{tX})^{-1} = (\mathrm{e}^{tX})^T = \mathrm{e}^{tX^T}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Il en résulte que

$$-X = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \mathrm{e}^{-tX} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \mathrm{e}^{tX^T} = X^T,$$

c.-à-d., on trouve $X \in \mathrm{so}(d, \mathbb{C})$ (sans utiliser la condition $\det(\mathrm{e}^{tX}) = 1$).

$\supseteq$: Soit $X \in \mathrm{so}(d, \mathbb{C})$. Alors, $X \in \mathrm{Mat}(d, \mathbb{C})$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $(\mathrm{e}^{tX})^{-1} = \mathrm{e}^{-tX} = \mathrm{e}^{tX^T} = (\mathrm{e}^{tX})^T$. En plus, comme

$$\mathrm{tr}(X) = \mathrm{tr}(X^T) = -\mathrm{tr}(X)$$

implique $\mathrm{tr}(X) = 0$, on obtient $\det(\mathrm{e}^{tX}) = \mathrm{e}^{t\mathrm{tr}(X)} = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, c.-à-d., $X \in \mathrm{Lie}(\mathrm{SO}(d, \mathbb{C}))$.

□

Question 5. Soit G un GLM abélien.

(a) [3.0] Montrer que $\mathrm{Ad}_A(X) = X$ pour tout $A \in G$ et tout $X \in \mathrm{Lie}(G)$.

(b) [3.0] Montrer que $\mathrm{ad}_X(Y) = 0$ pour tout $X, Y \in \mathrm{Lie}(G)$.

Indication : Utiliser que ad est le HAL associé au HGL Ad.

(c) [3.0] Soit G un GLM abélien connexe. Montrer que $\exp_G : \mathrm{Lie}(G) \to G$ est surjectif.

Indication : Comment peut-on écrire un élément $A \in G$ si G est connexe ?

Solution

(a) Comme G est abélien, on a $A\mathrm{e}^{tX}A^{-1} = \mathrm{e}^{tX}$ pour tout $A \in G$, tout $X \in \mathrm{Lie}(G)$ et tout $t \in \mathbb{R}$. Alors, en dérivant cette équation p.r. à t au point $t = 0$, on trouve

$$\underbrace{AXA^{-1}}_{=\mathrm{Ad}_A(X)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} A\mathrm{e}^{tX}A^{-1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \mathrm{e}^{tX} = X.$$

(b) Comme ad est le HAL associé au HGL Ad (cf. Prop. 2.25 *(c)*), on peut écrire que, pour tout $X, Y \in \mathrm{Lie}(G)$ et tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{Ad}_{\mathrm{e}^{tX}}(Y) = \mathrm{e}^{t\mathrm{ad}_X}(Y).$$

Alors, en utilisant *(a)*, il en résulte que $\mathrm{e}^{t\mathrm{ad}_X}(Y) = \mathrm{Ad}_{\mathrm{e}^{tX}}(Y) = Y$, d'où on obtient

$$\mathrm{ad}_X(Y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \mathrm{e}^{t\mathrm{ad}_X}(Y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} Y = 0.$$

(c) Si G est connexe, Prop. 2.28 implique qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \ldots, X_N \in \mathrm{Lie}(G)$ t.q. $A = \prod_{i=1}^N \exp_G(X_i)$. En utilisant *(b)* et Prop. 2.6 *(e)*, on a

$$A = \mathrm{e}^{X_1}\mathrm{e}^{X_2} \ldots \mathrm{e}^{X_N} = \mathrm{e}^{X_1+X_2+\ldots+X_N} = \exp_G\left(\sum_{i=1}^N X_N\right).$$

□