UNIVERSITÉ DE TOULON
UFR Sciences et Techniques

# *Initiation à la recherche*

---

W. Aschbacher **M74 M1** Cours du 1er semestre 2014 – 2015 *Master Mathématiques*

**Examen du 18/12/2014** (Contrôle continu)
**Durée :** 60 minutes
**Moyens autorisés :** Un aide-mémoire constitué d'une seule feuille A4 recto-verso

---

## Questions à choix multiple

**Nota bene :** Un point n'est accordé que si, pour chaque question, tous les items sont correctement cochés. Il n'y aura pas de demi-points ou de points négatifs.

**Question 1.** [1.0] Soit $G$ un GLM dans $\mathrm{GL}(d, \mathbb{C})$. Lesquels des énoncés suivants sont justes ?

- ☐ $G$ est fermé dans $\mathrm{Mat}(d, \mathbb{C})$.
- ☐ La composante connexe de l'identité $G_e$ est un sous-groupe de $G$.
- ☐ $\mathrm{e}^X \in G_e$ pour tout $X \in G$

**Question 2.** [1.0] Soit $\exp : \mathrm{Lie}(G) \to G$ l'application exponentielle. Lesquels des énoncés suivants sont justes ?

- ☐ Si $G$ est connexe, pour tout $A \in G$, il existe $X \in \mathrm{Lie}(G)$ t.q. $A = \exp(X)$.
- ☐ $\exp$ est localement inversible.
- ☐ $\mathrm{e}^{\log(X)} = X$ pour tout $X \in \mathrm{Lie}(G)$

**Question 3.** [1.0] Soient $G$ et $H$ des GLM et soit $\varphi : \mathrm{Lie}(G) \to \mathrm{Lie}(H)$ un HAL. Nous avons montré que, si $G$ est simplement connexe, il existe un unique HGL $\Phi : G \to H$ associé à $\varphi$. Comment avons-nous utilisé la formule de BCH dans la démonstration de ce théorème ?

*Réponse (courte)* :

## Questions ouvertes

**Nota bene :** Les réponses à toutes les questions sont à justifier.
Le barème est donné à titre inidicatif.

**Question 4.** Nous considérons les ensembles

$$\mathrm{SO}(d,\mathbb{C}) = \{A \in \mathrm{GL}(d,\mathbb{C}) \mid A^{-1} = A^T \text{ et } \det(A) = 1\},$$
$$\mathrm{so}(d,\mathbb{C}) = \{X \in \mathrm{Mat}(d,\mathbb{C}) \mid X^T = -X\}.$$

Montrer :

*(a)* [4.0] $\mathrm{SO}(d,\mathbb{C})$ est un GLM dans $\mathrm{GL}(d,\mathbb{C})$ (le **groupe orthogonal complexe spécial**).

*(b)* [4.0] $\mathrm{Lie}(\mathrm{SO}(d,\mathbb{C})) = \mathrm{so}(d,\mathbb{C})$

**Question 5.** Soit $G$ un GLM abélien.

*(a)* [3.0] Montrer que $\mathrm{Ad}_A(X) = X$ pour tout $A \in G$ et tout $X \in \mathrm{Lie}(G)$.

*(b)* [3.0] Montrer que $\mathrm{ad}_X(Y) = 0$ pour tout $X, Y \in \mathrm{Lie}(G)$.

*Indication :* Utiliser que $\mathrm{ad}$ est le HAL associé au HGL $\mathrm{Ad}$.

*(c)* [3.0] Soit $G$ un GLM abélien connexe. Montrer que $\exp_G : \mathrm{Lie}(G) \to G$ est surjectif.

*Indication :* Comment peut-on écrire un élément $A \in G$ si $G$ est connexe ?