UNIVERSITÉ DE TOULON

UFR Sciences et Techniques

Fonctions analytiques – TD 17

W. Aschbacher (*http ://aschbacher.univ-tln.fr/*)

M65 L3 Cours du 2e semestre 2014 – 2015 (19x2h CM et 19x2h TD)

Licence Mathématiques

Exercice 65. Soit $w \in \mathbb{C}$. La fonction $f_w : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ est définie, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, par

$$f_w(z) := \exp\left(\frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right) w\right).$$

En plus, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, soient $J_n(w)$ les coéfficients du développement de Laurent de f_w dans $\mathbb{C}^*$ autour de l'origine (les **fonctions de Bessel**). Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

(a) $J_{-n}(w) = J_n(-w)$

(b) $J_n(w) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t \, \cos(nt - w \sin t)$

Solution Comme $f_w \in \mathcal{O}(A_{0,\infty}(0))$, le théorème du développement de Laurent (cf. Thm. 10.8) implique que, pour tout $0 < \rho < \infty$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$J_n(w) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial B_\rho(0)} \mathrm{d}z \, \frac{f_w(z)}{z^{n+1}}. \tag{1}$$

(a) Soit $n \in \mathbb{Z}$ quelconque. En utilisant le chemin $[0, 2\pi] \ni t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \in \partial\mathbb{E}$ (on peut choisir $\rho = 1$ dans (1)), on calcule que

$$\begin{aligned} J_{-n}(w) &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial B_\rho(0)} \mathrm{d}z \, \frac{f_w(z)}{z^{-n+1}} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t \, \frac{f_w(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-n+1)t}} \, \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t \, \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t})w}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}} \\ &\overset{\boxed{t = 2\pi - s}}{=} \frac{1}{2\pi}(-1) \int_{2\pi}^0 \mathrm{d}s \, \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}s})w}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}ns}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}s \, \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}s} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}s})(-w)}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}ns}} = J_n(-w). \end{aligned}$$

(b) En utilisant la formule d'Euler (cf. Prop. 4.10), on peut écrire que

$$\begin{aligned}J_n(w) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t\, \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t})w}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t\, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}w\sin t}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(nt-w\sin t)}\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t\, \cos(nt-w\sin t) - \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\underbrace{\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t\, \sin(nt-w\sin t)}_{=0},\end{aligned}$$

où la dernière intégrale s'annule parce que la fonction $t \mapsto \sin(nt - w\sin t)$ est une fonction impaire de période 2π :

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t\, \sin(nt-w\sin t) &\overset{\boxed{t=2\pi-s}}{=} -\int_{2\pi}^{0} \mathrm{d}s\, \sin(n[2\pi-s]-w\sin[2\pi-s])\\ &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}s\, \sin(-sn-w\sin[-s+2\pi]+n2\pi)\\ &= -\int_0^{2\pi} \mathrm{d}s\, \sin(ns-w\sin s).\end{aligned}$$

□

Exercice 66. Soit $c \in \mathbb{C}$ et $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-c)^n$ une série de Laurent avec $r < s$ qui converge normalement vers $f \in \mathcal{O}(A_{r,s}(c))$. En plus, soit $r < \rho < s$. Montrer :

(a) **(Formule de Gutzmer)** $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2\rho^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t\, |f(c+\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})|^2$

(b) **(Inégalités de Cauchy)** Il existe $M(\rho) \geq 0$ t.q. $|a_n| \leq M(\rho)\rho^{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Solution *Indication :* Utiliser Rem. 6.13, le théorème de convergence pour les séries de Laurent (cf. Thm. 10.10) et l'expression pour les coéfficients d'une série de Laurent contenu dans le théorème d'identité pour les séries de Laurent (cf. Thm. 10.12).

(a) Comme $r < s$, le théorème de convergence pour les séries de Laurent implique que la série de Laurent converge normalement dans $A := A_{r,s}(c)$ vers une fonction $f \in \mathcal{O}(A)$. Alors, on peut écrire que $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-c)^n$ pour tout $z \in A$, et donc, notamment,

$$f(c+\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\rho^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}.$$

Comme $\overline{f(c+\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{a}_n\rho^n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}$, on obtient la série

$$|f(c+\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{a}_n\rho^n f(c+\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}$$

qui converge normalement dans A. Alors, en utilisant Rem. 6.13, on peut écrire que

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t\, |f(c+\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})|^2 &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{a}_n \rho^n f(c+\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt} \\ &\overset{\boxed{\text{Rem. 6.13}}}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{a}_n \rho^n \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t\, f(c+\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{a}_n \rho^{2n} a_n \\ &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 \rho^{2n},\end{aligned}$$

où, dans l'avant-dernière égalité, nous avons utilisé l'expression pour les coéfficients d'une série de Laurent contenu dans le théorème d'identité pour les séries de Laurent.

(b) En utilisant la partie *(a)*, nous obtenons, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, que

$$|a_n|^2 \rho^{2n} \leq \sum_{m=-\infty}^{\infty} |a_m|^2 \rho^{2m} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t\, |f(c+\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})|^2 \leq |f|^2_{\partial B_\rho(c)},$$

et nous pouvons poser $M(\rho) := |f|_{\partial B_\rho(c)}$.

□

Exercice 67. Soient $c \in \mathbb{C}$ et $0 \leq r < s \leq \infty$ et soit $A := A_{r,s}(c)$. En plus, soit $\mathcal{L}(A)$ l'ensemble des séries de Laurent qui convergent (normalement) dans A. Montrer qu'il existe une bijection

$$\mathcal{O}(A) \longrightarrow \mathcal{L}(A).$$

Solution *Indication :* Utiliser le théorème du développement de Laurent (cf. 10.8), le théorème de convergence pour les séries de Laurent (cf. 10.10) et le théorème d'identité pour les séries de Laurent (cf. 10.12).

Soit $\varphi : \mathcal{O}(A) \longrightarrow \mathcal{L}(A)$ l'application définie, pour tout $f \in \mathcal{O}(A)$, par

$$\varphi(f) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-c)^n,$$

où $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-c)^n$ est l'unique série de Laurent qui converge normalement vers f dans A (cf. le théorème du développement de Laurent).

φ est injectif : Si $\varphi(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-c)^n$ et $\varphi(g) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z-c)^n$ et si $\varphi(f) = \varphi(g)$, le théorème d'identité pour les séries de Laurent implique que $a_n = b_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

φ est surjectif : D'après le théorème de convergence pour les séries de Laurent, si $r < s$, toute série de Laurent $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-c)^n$ converge normalement dans A vers une fonction $f \in \mathcal{O}(A)$, c.-à-d., il existe $f \in \mathcal{O}(A)$ t.q. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-c)^n = \varphi(f)$. □

Exercice 68. Déterminer les domaines de convergence des séries de Laurent suivantes :

(a) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{|n|!}$ *(b)* $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-\frac{n+1+|n+1|}{2}} z^n$ *(c)* $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n (z-\mathrm{i})^n$ avec $a \in \mathbb{C}^*$

<u>Solution</u> D'après la définition juste avant le théorème de convergence pour les séries de Laurent (cf. Thm. 10.10), on appelle s le rayon de convergence de la partie secondaire $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ de la série de Laurent $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-c)^n$ et r l'inverse du rayon de convergence $\tilde{r}$ de la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}w^n$.

(a) Comme $a_n = a_{-n} = 1/|n|!$ et comme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est la série exponentielle, on obtient $s = \infty$ et $r = 1/\tilde{r} = 0$. Alors, le domaine de convergence est la coronne $A_{0,\infty}(0) = \mathbb{C}^*$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, nous avons

$$a_n = 2^{-\frac{n+1+|n+1|}{2}} = \begin{cases} 2^{-(n+1)}, & n \geq 0, \\ 1, & n \leq -1, \end{cases}$$

Alors, en utilisant la règle de d'Alembert (cf. Prop. 4.9), on trouve pour la partie secondaire que

$$s = \lim_{n\to\infty} 2^{-(n+1)+(n+2)} = 2,$$

et, pour la partie principale, on a $\tilde{r} = 1$ et donc $r = 1$. Alors, le domaine de convergence est la coronne $A_{1,2}(0)$.

Remarque : Nous notons que cette série de Laurent converge vers $-1/[(z-1)(z-2)]$.

(c) Comme $a_n = a^n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on trouve pour la partie secondaire et principale que

$$s = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a^n}{a^{n+1}}\right| = \frac{1}{|a|},$$
$$\tilde{r} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a^{-n}}{a^{-(n+1)}}\right| = |a|.$$

Alors, on obtient le cas où $s = r$ (on écarte les séries avec $r \geq s$ de la théorie des fonctions analytiques, cf. Rem. 10.11).

□