UNIVERSITÉ DE TOULON

UFR Sciences et Techniques

Fonctions analytiques – TD 17

W. Aschbacher (*http ://aschbacher.univ-tln.fr/*)

M65 L3 Cours du 2e semestre 2014 – 2015 (19x2h CM et 19x2h TD)

Licence Mathématiques

Exercice 65. Soit $w \in \mathbb{C}$. La fonction $f_w : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ est définie, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, par

$$f_w(z) := \exp\left(\frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right) w\right).$$

En plus, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, soient $J_n(w)$ les coéfficients du développement de Laurent de f_w dans $\mathbb{C}^*$ autour de l'origine (les **fonctions de Bessel**). Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

(a) $J_{-n}(w) = J_n(-w)$

(b) $J_n(w) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t\, \cos(nt - w\sin t)$

Exercice 66. Soit $c \in \mathbb{C}$ et $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-c)^n$ une série de Laurent avec $r < s$ qui converge normalement vers $f \in \mathcal{O}(A_{r,s}(c))$. En plus, soit $r < \rho < s$. Montrer :

(a) **(Formule de Gutzmer)** $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 \rho^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t\, |f(c+\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})|^2$

(b) **(Inégalités de Cauchy)** Il existe $M(\rho) \geq 0$ t.q. $|a_n| \leq M(\rho)\rho^{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 67. Soient $c \in \mathbb{C}$ et $0 \leq r < s \leq \infty$ et soit $A := A_{r,s}(c)$. En plus, soit $\mathcal{L}(A)$ l'ensemble des séries de Laurent qui convergent (normalement) dans A. Montrer qu'il existe une bijection

$$\mathcal{O}(A) \longrightarrow \mathcal{L}(A).$$

Exercice 68. Déterminer les domaines de convergence des séries de Laurent suivantes :

(a) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{|n|!}$ *(b)* $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-\frac{n+1+|n+1|}{2}} z^n$ *(c)* $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n (z-\mathrm{i})^n$ avec $a \in \mathbb{C}^*$