UNIVERSITÉ DE TOULON

UFR Sciences et Techniques

Fonctions analytiques – TD 16

W. Aschbacher (*http ://aschbacher.univ-tln.fr/*)

M65 L3 Cours du 2e semestre 2014 – 2015 (19x2h CM et 19x2h TD)

Licence Mathématiques

Exercice 61. Soit $f \in \mathcal{M}(D)$ et soit $\mathcal{P}(f)$ fini. Montrer qu'il existe une fonction rationnelle h dans D t.q. $\mathcal{P}(h) = \mathcal{P}(f)$ et $f - h \in \mathcal{O}(D)$.

Solution *Indication :* Utiliser Prop. 9.8.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ le nombre de pôles de f notés c_α pour tout $\alpha \in \mathcal{N} := \{1, \ldots, N\}$. En plus, soient $r_1, \ldots, r_N > 0$ t.q. les $B_\alpha := B_{r_\alpha}(c_\alpha)$ satisfont $\overline{B_\alpha} \subseteq D$ et $B_\alpha \cap B_\beta = \emptyset$ pour tout $\alpha, \beta \in \mathcal{N}$ avec $\alpha \neq \beta$.
Alors, Prop. 9.8 implique que, pour tout $\alpha \in \mathcal{N}$, il existe $\tilde{f}_\alpha \in \mathcal{O}(B_\alpha)$, des ordres $m_\alpha \in \mathbb{N}^*$ et $b_1^{(\alpha)}, \ldots, b_{m_\alpha}^{(\alpha)} \in \mathbb{C}$ avec $b_{m_\alpha}^{(\alpha)} \neq 0$ t.q., pour tout $z \in B_\alpha \setminus c_\alpha$, on a

$$f(z) = \sum_{i=1}^{m_\alpha} \frac{b_i^{(\alpha)}}{(z - c_\alpha)^i} + \tilde{f}_\alpha(z).$$

Alors, la fonction $h : D \setminus \mathcal{P}(f) \to \mathbb{C}$, définie, pour tout $z \in D \setminus \mathcal{P}(f)$, par

$$h(z) := \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{i=1}^{m_\alpha} \frac{b_i^{(\alpha)}}{(z - c_\alpha)^i},$$

est une fonction rationnelle avec $\mathcal{P}(h) = \mathcal{P}(f)$. En plus, comme $f, h \in \mathcal{O}(D \setminus \mathcal{P}(f))$, on a $f - h \in \mathcal{O}(D \setminus \mathcal{P}(f))$. Mais, pour tout $\alpha \in \mathcal{N}$, la différence $f - h \in \mathcal{O}(B_\alpha \setminus c_\alpha)$ possède également un prolongement holomorphe en c_α parce que, pour tout $z \in B_\alpha \setminus c_\alpha$, on a

$$(f - h)(z) = -\sum_{\beta \in \mathcal{N} \setminus \{\alpha\}} \underbrace{\sum_{i=1}^{m_\beta} \frac{b_i^{(\beta)}}{(z - c_\beta)^i}}_{\in \mathcal{O}(B_\alpha)} + \underbrace{\tilde{f}_\alpha(z)}_{\in \mathcal{O}(B_\alpha)}.$$

□

Exercice 62. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions $f_n \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ sont définies, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{-n\}$, par

$$f_n(z) := \frac{(-1)^{n+1}}{z+n}.$$

Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge compactement dans $\mathbb{C}$ mais qu'elle ne converge pas normalement dans $\mathbb{C}$.

Solution *Indication :* Utiliser le critère de Cauchy (cf. Thm. 3.9).

Nous notons d'abord que $f_n \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ et que $\mathcal{P}(f_n) = \{-n\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Afin de vérifier la condition *(a)* de Déf. 9.16, nous choisissons un compact K quelconque dans D. Alors, il existe certainement $N \in \mathbb{N}$ t.q., pour tout $n \geq N$, on a

$$\mathcal{P}(f_n) \cap K = \{-n\} \cap K = \emptyset.$$

Pour dériver la condition *(b)* de Déf. 9.16, nous utilisons la **sommation par parties** (ou la **sommation d'Abel**), c.-à-d., pour $a_i := (-1)^{i+1}$ et $g_i(z) := 1/(z+i)$ pour tout $i \geq N$ et tout $z \in K$, nous écrivons, pour tout $n > m \geq N$ et tout $z \in K$,

$$\begin{aligned}\sum_{i=m+1}^{n} f_i(z) &= \sum_{i=m+1}^{n} a_i g_i(z) = \sum_{i=m+1}^{n} (s_i - s_{i-1}) g_i(z) = \sum_{i=m+1}^{n} s_i g_i(z) - \sum_{i=m}^{n-1} s_i g_{i+1}(z) \\ &= s_n g_n(z) - s_m g_{m+1}(z) + \sum_{i=m+1}^{n-1} s_i [g_i(z) - g_{i+1}(z)], \end{aligned} \tag{1}$$

où nous avons utilisé la notation $s_i := \sum_{k=0}^{i} a_k$. Ensuite, on note que $|s_i| \leq 1$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. En plus, pour tout $z \in K$ et tout $i \geq 3N+1$, on a

$$|g_i(z)| = \frac{1}{|z+i|} \leq \frac{1}{i - N - |z+N|} \leq \frac{1}{i-3N}, \tag{2}$$

parce que $|z+N| \leq N + R < 2N$ où $R < N$ est t.q. $K \subseteq B_R(0)$, c.-à-d., g_i converge uniformément vers zéro dans K. Ensuite, d'après le critère de Cauchy pour les séries (cf. Thm. 3.10), la série de fonctions $\sum_{i=N}^{\infty} |g_i - g_{i+1}|$ converge uniformément dans K parce que

$$\begin{aligned}\sum_{i=m+1}^{n} |g_i - g_{i+1}| &= \sum_{i=m+1}^{n} \left| \frac{1}{z+i} - \frac{1}{z+i+1} \right| = \sum_{i=m+1}^{n} \frac{1}{|z+i||z+i+1|} \\ &\leq \sum_{i=m+1}^{n} \frac{1}{(i-3N)(i+1-3N)} \leq 2 \sum_{i=m+1}^{n} \frac{1}{i^2}, \end{aligned} \tag{3}$$

où, dans la dernière inégalité, nous avons utilisé que m est suffisamment grand. Alors, en utilisant (1) – (3), on obtient, pour m suffisamment grand et tout $z \in K$,

$$\left| \sum_{i=m+1}^{n} f_i(z) \right| \leq \frac{2}{n} + \frac{2}{m+1} + 2 \sum_{i=m+1}^{n} \frac{1}{i^2} \xrightarrow[m \to \infty]{} 0,$$

c.-à-d., la série $\sum_{i=1}^{\infty} f_i$ converge compactement dans $\mathbb{C}$.
Par contre, elle ne converge pas normalement dans $\mathbb{C}$ parce que, pour tout $n \geq N$ suffisamment grand et tout $z \in K$, on a

$$|f_n(z)| = \frac{1}{|z+n|} \geq \frac{1}{n+R} \geq \frac{1}{2}\frac{1}{n},$$

et la série $\sum_{n=N}^{\infty} 1/n$ diverge. □

Exercice 63. La fonction $f \in \mathcal{O}(A_{\sqrt{2},2}(-\mathrm{i}))$ est définie, pour tout $z \in A_{\sqrt{2},2}(-\mathrm{i})$, par

$$f(z) := \frac{z}{z^2 - (1+\mathrm{i})z + \mathrm{i}}.$$

Déterminer la décomposition de Laurent de f.

Solution *Indication :* Utiliser la décomposition en éléments simples.
Soit $A := A_{\sqrt{2},2}(-\mathrm{i})$ et soient $A^+ := B_2(-\mathrm{i})$ et $A^- := \mathbb{C} \setminus \overline{B_{\sqrt{2}}(-\mathrm{i})}$. Afin de déterminer la décomposition de Laurent de f, nous décomposons f en éléments simples (fractions partielles). Alors, comme $z^2 - (1+\mathrm{i})z + \mathrm{i} = (z-1)(z-\mathrm{i})$, il existe des constantes $a, b \in \mathbb{C}$ t.q., pour tout $z \in A$, on a

$$f(z) = \frac{z}{z^2 - (1+\mathrm{i})z + \mathrm{i}} = \frac{z}{(z-1)(z-\mathrm{i})} = \frac{a}{z-1} + \frac{b}{z-\mathrm{i}} = \frac{(a+b)z - \mathrm{i}a - b}{(z-1)(z-\mathrm{i})}.$$

En comparant les coéfficients des deux numérateurs, on obtient

$$a = \frac{1+\mathrm{i}}{2}, \qquad b = \frac{1-\mathrm{i}}{2},$$

et donc, $f \in \mathcal{O}(A)$ et, dans A, f peut s'écrire sous la forme

$$f = f^+ + f^-, \tag{4}$$

où nous avons utilisé les définitions

$$f^+(z) := \frac{1-\mathrm{i}}{2}\frac{1}{z-\mathrm{i}} \in \mathcal{O}(A^+), \tag{5}$$

$$f^-(z) := \frac{1+\mathrm{i}}{2}\frac{1}{z-1} \in \mathcal{O}(A^-). \tag{6}$$

En plus, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $R > 0$, p.ex. $R = 1 + 1/\varepsilon > 1$, t.q., pour tout $z \in A^-$ avec $|z| \geq R$, on a

$$|f^-(z)| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{R-1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon < \varepsilon,$$

c.-à-d., que, par définition (cf. juste avant Thm. 10.4), on a

$$\lim_{z\to\infty} f^-(z) = 0. \tag{7}$$

Alors, d'après Thm. 10.4, les propriétés (4) – (7) fournissent la décoposition de Laurent.

□

Exercice 64. La fonction $f \in \mathcal{O}(A_{1,2}(1))$ est définie, pour tout $z \in A_{1,2}(1)$, par

$$f(z) := \frac{1}{z}.$$

Déterminer le développement de Laurent de f.

Solution *Indication :* Utiliser la série géométrique.

Soit $A := A_{1,2}(1)$. Afin de déterminer le développement de Laurent de f autour du point $c = 1$, nous voulons utiliser une série géométrique. Comme la variable en laquelle le développement en série géométrique se fait doit être de module strictement inférieur à 1, nous écrivons f, pour tout $z \in A$, dans la forme

$$f(z) = \frac{1}{z} = 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1-z}},$$

et nous notons que $|1/(1-z)| < 1$ parce que $|1-z| > 1$ pour tout $z \in A$. Alors, la série géométrique nous fournit que

$$f(z) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (1-z)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} (-1)^{n+1} (z-1)^n. \tag{8}$$

Comme, d'après le théorème du développement de Laurent (cf. Thm. 10.8), le développement de Laurent est unique, (8) fournit la partie principale de la série de Laurent. En plus, on obtient que la partie secondaire est nulle (ce qu'on voit déjà dans la forme initiale de f en utilisant la décomposition de Laurent du Thm. 10.4). $\square$