UNIVERSITÉ DE TOULON

UFR Sciences et Techniques

Fonctions analytiques – TD 14

W. Aschbacher (*http ://aschbacher.univ-tln.fr/*)

M65 L3 Cours du 2e semestre 2014 – 2015 (19x2h CM et 19x2h TD)

Licence Mathématiques

Exercice 53. Soit D un connexe t.q. $D = \{\bar{z}\,|\,z \in D\}$ et $D \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$ et soit $f \in \mathcal{O}(D)$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) $f(D \cap \mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$

(b) $f(\bar{z}) = \bar{f}(z)$ pour tout $z \in D$

Exercice 54. Soient $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ avec $g^{-1}(\{0\}) = \emptyset$ t.q., pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$|f(z)| \leq |g(z)|.$$

Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ t.q. $f(z) = \lambda g(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 55. Montrer :

(a) **(Principe du minimum)** Soit D connexe et $f \in \mathcal{O}(D)$. En plus, soit $c \in D$ et U un voisinage de c t.q.

$$|f(c)| = \inf_{z \in U} |f(z)|.$$

Alors, ou bien $f(c) = 0$, ou bien f est constant dans D.

(b) **(Principe du minimum pour des bornés)** Soit D connexe et borné et soit $f \in C(\overline{D}) \cap \mathcal{O}(D)$. Alors, ou bien f a des zéros en D, ou bien $|f|$ admet son minimum sur le bord de D, c.-à-d., pour tout $z \in \overline{D}$, on a

$$|f(z)| \geq \min_{w \in \partial D} |f(w)|.$$

Exercice 56. Soit D connexe et borné et soient $f, g \in C(\overline{D}) \cap \mathcal{O}(D)$ avec $f^{-1}(\{0\}) = g^{-1}(\{0\}) = \emptyset$ t.q., pour tout $z \in \partial D$, on a

$$|f(z)| = |g(z)|.$$

Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $|\lambda| = 1$ t.q. $f(z) = \lambda g(z)$ pour tout $z \in \overline{D}$.