Fonctions analytiques – TD 13

W. Aschbacher (*http ://aschbacher.univ-tln.fr/*)

M65 L3 Cours du 2e semestre 2014 – 2015 (19x2h CM et 19x2h TD)

Licence Mathématiques

Exercice 49. Soit $f \in \mathcal{O}(D)$ et soient $0 \in D$ et $r > 0$ t.q. $\overline{B_r(0)} \subseteq D$. Montrer :

$$\bar{f}(0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial B_r(0)} \mathrm{d}\zeta \, \frac{\bar{f}(\zeta)}{\zeta - z} \quad \text{pour tout } z \in B_r(0)$$

Solution *Indication* : Considérer l'intégral $\int_{\partial B_r(0)} \mathrm{d}\zeta [h(\zeta) + f(\zeta)/\zeta]$ pour la fonction $h(\zeta) := \bar{z} f(\zeta)/(r^2 - \bar{z}\zeta)$ définie dans un voisinage de $\overline{B_r(0)}$ pour un $z \in B_r(0)$ fixé.

Soit $z \in B := B_r(0)$ fixé et soit $s > r$ (suffisamment petit pour que l'équation $r^2 - \bar{z}\zeta = 0$ n'ait pas de solution $\zeta \in \tilde{B} := B_s(0)$, c.-à-d., p. ex., $r < s < r^2/|z|$ si $z \neq 0$) t.q. $\overline{B} \subseteq \tilde{B} \subseteq D$. Alors, la fonction $h : \tilde{B} \to \mathbb{C}$, définie, pour tout $\zeta \in \tilde{B}$, par

$$h(\zeta) := \frac{\bar{z} f(\zeta)}{r^2 - \bar{z}\zeta},$$

satisfait $h \in \mathcal{O}(\tilde{B})$, et donc, le théorème intégral de Cauchy (cf. Thm. 7.2) implique que $\int_{\partial B} \mathrm{d}\zeta \, h(\zeta) = 0$. En plus, on calcule que, pour tout $\zeta \in \partial B$,

$$h(\zeta) + \frac{f(\zeta)}{\zeta} = \frac{\bar{z} f(\zeta)}{r^2 - \bar{z}\zeta} + \frac{f(\zeta)}{\zeta} = \frac{f(\zeta)}{\zeta} \left(\frac{\bar{z}\zeta}{r^2 - \bar{z}\zeta} + 1 \right) = \frac{f(\zeta)}{\zeta} \frac{r^2}{r^2 - \bar{z}\zeta} = \frac{f(\zeta)}{\zeta} \frac{\bar{\zeta}}{\bar{\zeta} - \bar{z}},$$

où on a utilisé que $r^2 = \bar{\zeta}\zeta$. Alors, la formule intégrale de Cauchy (cf. Thm. 7.6) fournit

$$2\pi \mathrm{i} f(0) \overset{\boxed{\text{Thm. 7.6}}}{=} \int_{\partial B} \mathrm{d}\zeta \, \frac{f(\zeta)}{\zeta} = \int_{\partial B} \mathrm{d}\zeta \left(h(\zeta) + \frac{f(\zeta)}{\zeta} \right) = \int_{\partial B} \mathrm{d}\zeta \, \frac{f(\zeta)}{\zeta} \frac{\bar{\zeta}}{\bar{\zeta} - \bar{z}}. \tag{1}$$

En utilisant le paramétrage $[0, 2\pi] \ni t \mapsto r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \in \mathbb{C}$ de ∂B et le conjugué de (1), on obtient

$$\begin{aligned} -2\pi \mathrm{i} \bar{f}(0) &= \overline{\int_{\partial B} \mathrm{d}\zeta \, \frac{f(\zeta)}{\zeta} \frac{\bar{\zeta}}{\bar{\zeta} - \bar{z}}} = \overline{\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t \, \frac{f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} \frac{r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} - \bar{z}} \, \mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} \\ &= -\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t \, \frac{\bar{f}(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}} \frac{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - z} \, \mathrm{i}r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} = -\int_{\partial B} \mathrm{d}\zeta \, \frac{\bar{f}(\zeta)}{\zeta - z}. \end{aligned}$$

□

Exercice 50. Soit $f \in \mathcal{O}(D)$ et soient $0 \in D$ et $r > 0$ t.q. $\overline{B_r(0)} \subseteq D$. Montrer la **formule intégrale de Schwarz**, c.-à-d. :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial B_r(0)} \mathrm{d}\zeta \; \frac{\mathrm{Re} f(\zeta)}{\zeta} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} + \mathrm{i}\mathrm{Im} f(0) \quad \text{pour tout } z \in B_r(0)$$

Solution *Indication* : Ecrire $(\zeta + z)/[\zeta(\zeta - z)] = 2/(\zeta - z) - 1/\zeta$ et $\mathrm{Re}(f) = (f + \bar{f})/2$ et utiliser Exr. 49.

Soit $z \in B := B_r(0)$ fixé. Alors, pour tout $\zeta \in \partial B$, on peut écrire

$$\frac{1}{\zeta} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} = \frac{2}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta}.$$

Comme $2\mathrm{Re}(f) = f + \bar{f}$, la formule intégrale de Cauchy (cf. Thm. 7.6) et Exr. 49 fournissent

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B_r(0)} \mathrm{d}\zeta \; \frac{\mathrm{Re} f(\zeta)}{\zeta} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} &= \int_{\partial B_r(0)} \mathrm{d}\zeta \; \frac{f(z) + \bar{f}(z)}{\zeta - z} - \frac{1}{2} \int_{\partial B_r(0)} \mathrm{d}\zeta \; \frac{f(z) + \bar{f}(z)}{\zeta} \\
&= 2\pi \mathrm{i} f(z) + \underbrace{\int_{\partial B_r(0)} \mathrm{d}\zeta \; \frac{\bar{f}(z)}{\zeta - z}}_{\overset{\boxed{\text{Exr. 49}}}{=} 2\pi \mathrm{i} \bar{f}(0)} - \pi \mathrm{i} f(0) - \frac{1}{2} \underbrace{\int_{\partial B_r(0)} \mathrm{d}\zeta \; \frac{\bar{f}(z)}{\zeta}}_{\overset{\boxed{\text{Exr. 49}}}{=} 2\pi \mathrm{i} \bar{f}(0)} \\
&= 2\pi \mathrm{i} [f(z) - \mathrm{i}\mathrm{Im} f(0)].
\end{aligned}$$

□

Exercice 51. Soit D connexe et soit $f \in \mathcal{O}(D)$ une fonction non constante. Montrer que, dans tout compact $K \subseteq D$, le nombre de zéros de f est fini.

Solution *Indication* : Utiliser le théorème d'identité (cf. Thm. 8.1) pour l'image réciproque $f^{-1}(0) = \{z \in D \,|\, f(z) = 0\}$ et considérer $K \cap f^{-1}(0)$.

On remarque d'abord :

(a) L'ensemble $f^{-1}(0)$ est fermé (car l'image réciproque d'un ensemble fermé par une fonction continue est fermée, cf. le cours d'analyse).

(b) L'ensemble $f^{-1}(0)$ n'a pas de points d'accumulation (car, si on suppose le contraire, le théorème d'identité implique que f est égal à la fonction constante zéro ce qui est exclu par l'hypothèse).

Supposons maintenant que $K \cap f^{-1}(0)$ contient un nombre infini de points. Comme, d'après *(a)*, l'ensemble $K \cap f^{-1}(0)$ est compact, le théorème de Bolzano-Weierstrass (cf. le cours d'analyse) implique qu'il existe une suite convergente dans $K \cap f^{-1}(0)$ ce qui est impossible grâce à *(b)*.

□

Exercice 52. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ avec $a_n \neq 0$. En plus, soit p le polynôme défini par $p(z) := a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.
Montrer :

(a) **(Lemme de croissance)** Il existe $R > 0$ t.q., pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| \geq R$, on a

$$\frac{1}{2}|a_n||z|^n \leq |p(z)| \leq 2|a_n||z|^n.$$

(b) **(Théorème fondamental de l'algèbre)** p a un zéro.

Solution *Indication* : Utiliser le théorème de Liouville (cf. Thm. 8.6) (pour *(b)*).

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $r(z) := \sum_{i=0}^{n-1} |a_i||z|^i$. Alors, en utilisant l'inégalité triangulaire, on peut écrire que, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$|a_n||z|^n - r(z) \leq |p(z)| \leq |a_n||z|^n + r(z).$$

Comme $|z|^m \leq |z|^{n-1}$ pour tout $|z| \geq 1$ et tout $m \in \mathbb{N}$ avec $m < n$, on a $r(z) \leq M|z|^{n-1}$ pour tout $|z| \geq 1$, où $M := \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|$. Il en résulte que, pour tout $|z| \geq 1$, on a

$$|p(z)| \leq |a_n||z|^n + r(z) \leq |a_n||z|^n + M|z|^{n-1} = \left(|a_n| + \frac{M}{|z|}\right)|z|^n$$
$$|p(z)| \geq |a_n||z|^n - r(z) \geq |a_n||z|^n - M|z|^{n-1} = \left(|a_n| - \frac{M}{|z|}\right)|z|^n.$$

Alors, si $|z| \geq R := \max\{1, 2M/|a_n|\}$, on obtient l'énoncé.

(b) Supposons que p n'a pas de zéro. La fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, définie, pour tout $z \in \mathbb{C}$, par

$$f(z) := \frac{1}{p(z)},$$

satisfait donc $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. En plus, en utilisant *(a)*, on a, pour tout $|z| \geq R$, que

$$|f(z)| \leq \frac{2}{|a_n||z|^n} \leq \frac{2}{|a_n|R^n},$$

et, comme f est continu, on a également $|f(z)| \leq C$ pour un $C > 0$ et tout $z \in \overline{B_R(0)}$, c.-à-d., f est borné sur la totalité de $\mathbb{C}$. Alors, le théorème de Liouville implique que f est constant. Mais ceci est en contradiction avec l'hypothèse que $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_n \neq 0$.

$\square$