UFR Sciences et Techniques

Fonctions analytiques – TD 13

W. Aschbacher (*http ://aschbacher.univ-tln.fr/*)

M65 L3 Cours du 2e semestre 2014 – 2015 (19x2h CM et 19x2h TD)

Licence Mathématiques

Exercice 49. Soit $f \in \mathcal{O}(D)$ et soient $0 \in D$ et $r > 0$ t.q. $\overline{B_r(0)} \subseteq D$. Montrer :

$$\bar{f}(0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial B_r(0)} \mathrm{d}\zeta \, \frac{\bar{f}(\zeta)}{\zeta - z} \quad \text{pour tout } z \in B_r(0)$$

Exercice 50. Soit $f \in \mathcal{O}(D)$ et soient $0 \in D$ et $r > 0$ t.q. $\overline{B_r(0)} \subseteq D$. Montrer la **formule intégrale de Schwarz**, c.-à-d. :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial B_r(0)} \mathrm{d}\zeta \, \frac{\mathrm{Re} f(\zeta)}{\zeta} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} + \mathrm{i}\,\mathrm{Im} f(0) \quad \text{pour tout } z \in B_r(0)$$

Exercice 51. Soit D connexe et soit $f \in \mathcal{O}(D)$ une fonction non constante. Montrer que, dans tout compact $K \subseteq D$, le nombre de zéros de f est fini.

Exercice 52. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ avec $a_n \neq 0$. En plus, soit p le polynôme défini par $p(z) := a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.
Montrer :

(a) **(Lemme de croissance)** Il existe $R > 0$ t.q., pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| \geq R$, on a

$$\frac{1}{2}|a_n||z|^n \leq |p(z)| \leq 2|a_n||z|^n.$$

(b) **(Théorème fondamental de l'algèbre)** p a un zéro.