UNIVERSITÉ DE TOULON

UFR Sciences et Techniques

Fonctions analytiques – TD 12

W. Aschbacher (*http ://aschbacher.univ-tln.fr/*)

M65 L3 Cours du 2e semestre 2014 – 2015 (19x2h CM et 19x2h TD)

Licence Mathématiques

Exercice 45. Soit $f \in \mathcal{O}(D)$, et soient $c \in D$ et $r > 0$ t.q. $\overline{B_r(c)} \subseteq D$. Montrer :

(a) $f(c) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t\, f(c + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$ **(Propriété de la moyenne)**

(b) $|f(c)| \leq |f|_{\partial B_r(c)}$

(c) $|f(z)| \leq |f|_{\partial B_r(c)}$ pour tout $z \in B_r(c)$

Solution

(a) En utilisant la formule intégrale de Cauchy (cf. Thm. 7.6) pour la courbe $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ donnée dans Ex. 6.3 *(c)* par $\gamma(t) = c + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, on obtient

$$f(c) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \mathrm{d}z\, \frac{f(z)}{z - c} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t\, f(c + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) \frac{1}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}\, \mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t\, f(c + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}).$$

(b) En utilisant *(a)*, on obtient

$$|f(c)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t\, \underbrace{|f(c + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})|}_{\leq \sup_{z \in \partial B_r(c)} |f(z)|} \leq |f|_{\partial B_r(c)}.$$

(c) Soit $z \in B_r(c)$ fixé. Alors, en utilisant la formule intégrale de Cauchy et l'estimation standard (cf. Prop. 6.11), on peut écrire que

$$|f(z)| \leq \underbrace{\frac{1}{2\pi}\, 2\pi\, r \sup_{\zeta \in \partial B_r(c)} \left| \frac{1}{z - \zeta} \right|}_{=: a_z} \sup_{\zeta \in \partial B_r(c)} |f(\zeta)|. \tag{1}$$

Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la puissance f^n satisfait $f^n \in \mathcal{O}(D)$, on peut substituer f^n à la place de f dans (1) et on obtient $|f(z)|^n \leq a_z |f|^n_{\partial B_r(c)}$, c.-à-d.,

$$|f(z)| \leq \sqrt[n]{a_z}\, |f|_{\partial B_r(c)}. \tag{2}$$

En notant que $\sup_{\zeta \in \partial B_r(c)} |1/(z-\zeta)| = 1/(r - |c-z|)$ pour tout $z \in B_r(c)$, on a $a_z \geq 1$ pour tout $z \in B_r(c)$. Alors, en prenant la limite $n \to \infty$ dans (2) et en utilisant que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_z} = 1$, on arrive à l'énoncé (Landau, 1916).

□

Exercice 46. Calculer :

$$\text{(a)} \int_{\partial B_2(-2\mathrm{i})} \frac{\mathrm{d}z}{z^2+1} \qquad \text{(b)} \int_{\partial B_1(0)} \mathrm{d}z\, \frac{\mathrm{e}^z}{(z-2)^3}$$

Solution

(a) Comme $z^2+1 = (z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})$, nous pouvons écrire

$$\int_{\partial B_2(-2\mathrm{i})} \frac{\mathrm{d}z}{z^2+1} = \int_{\partial B_2(-2\mathrm{i})} \mathrm{d}z\, \frac{f(z)}{z+\mathrm{i}},$$

où la fonction $f : \mathbb{C}\setminus\{\mathrm{i}\} \to \mathbb{C}$ est définie, pour tout $z \in \mathbb{C}\setminus\{\mathrm{i}\}$, par

$$f(z) := \frac{1}{z-\mathrm{i}}.$$

En posant $D := \mathbb{C}\setminus\{\mathrm{i}\}$, $c := -2\mathrm{i}$ et $r := 2$, on a $f \in \mathcal{O}(D)$ et $\overline{B_r(c)} \subseteq D$. Alors, nous pouvons appliquer la formule intégrale de Cauchy pour les disques (cf. Thm. 7.6) qui nous fournit que

$$\int_{\partial B_2(-2\mathrm{i})} \mathrm{d}z\, \frac{f(z)}{z+\mathrm{i}} = 2\pi\mathrm{i} f(-\mathrm{i}) = -\pi.$$

(b) La fonction $f : \mathbb{C}\setminus\{2\} \to \mathbb{C}$ est définie, pour tout $z \in \mathbb{C}\setminus\{2\}$, par

$$f(z) := \frac{\mathrm{e}^z}{(z-2)^3}.$$

En posant $D := B_{3/2}(0)$, on a que D est étoilé et que $f \in \mathcal{O}(D)$. Alors, comme $\partial B_1(0)$ est une courbe fermée dans D, le théorème intégral de Cauchy pour des domaines étoilés (cf. Thm. 7.2) fournit que

$$\int_{\partial B_1(0)} \mathrm{d}z\, f(z) = 0.$$

□

Exercice 47. Soient f et g les fonctions limites des séries entières centrées à l'origine et respectivement de rayons de convergence s et t et à coéfficients a_n et b_n.
Montrer que, dans $B_r(0)$ avec $r := \min\{s, t\}$, le produit fg a un développement en forme d'un **produit de Cauchy**, c.-à-d.,

$$(fg)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad \text{où} \quad c_n := \sum_{k+l=n} a_k b_l.$$

Solution Comme, d'après Thm. 4.16 *(a)*, les fonctions limites satisfont $f \in \mathcal{O}(B_s(0))$ et $g \in \mathcal{O}(B_t(0))$, on a $fg \in \mathcal{O}(B_r(0))$. Alors, le théorème de Cauchy-Taylor (cf. Thm. 7.10) implique que fg est développable dans $B_r(0)$ en une série entière, la série de Taylor, c.-à-d., pour tout $z \in B_r(0)$, on peut écrire

$$(fg)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(fg)^{(n)}(0)}{n!} z^n.$$

Il suffit alors de calculer $(fg)^{(n)}(0)$. En utilisant la formule de Leibniz, on a

$$(fg)^{(n)}(0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(0) g^{(n-k)}(0) = \sum_{k+l=n} \frac{n!}{k!l!} \underbrace{f^{(k)}(0)}_{=k!a_k} \underbrace{g^{(l)}(0)}_{=l!a_l}.$$

□

Exercice 48. Soient $a, b \in \mathbb{C}$ t.q. $|a| < 1$ et $|b| > 1$ et soient $n, m \in \mathbb{N}^*$. Calculer :

$$\int_{\partial \mathbb{E}} \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n (z-b)^m}$$

Solution La fonction $f : \mathbb{C} \setminus \{b\} \to \mathbb{C}$, définie, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{b\}$, par

$$f(z) := \frac{1}{(z-b)^m},$$

satisfait $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{b\})$. Alors, d'après le théorème de Cauchy-Taylor (cf. Thm. 7.10), f est analytique dans $B_{|b|}(0)$, et nous pouvons écrire

$$\int_{\partial \mathbb{E}} \mathrm{d}z \, \frac{f(z)}{(z-a)^n} = \frac{2\pi \mathrm{i}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a).$$

Il suffit alors de calculer $f^{(n-1)}(a)$. Nous trouvons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f^{(n-1)}(a) = (-1)^{n-1} \frac{(m+n-2)!}{(m-1)!} \frac{1}{(a-b)^{m+n-1}}.$$

□