UNIVERSITÉ DE TOULON
UFR Sciences et Techniques

# *Fonctions analytiques – TD 12*

W. Aschbacher (*http ://aschbacher.univ-tln.fr/*)

**M65 L3** Cours du 2e semestre 2014 – 2015 (19x2h CM et 19x2h TD)

*Licence Mathématiques*

**Exercice 45.** Soit $f \in \mathcal{O}(D)$, et soient $c \in D$ et $r > 0$ t.q. $\overline{B_r(c)} \subseteq D$. Montrer :

*(a)* $f(c) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t\, f(c + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$ **(Propriété de la moyenne)**

*(b)* $|f(c)| \leq |f|_{\partial B_r(c)}$

*(c)* $|f(z)| \leq |f|_{\partial B_r(c)}$ pour tout $z \in B_r(c)$

**Exercice 46.** Calculer :

$$\text{(a)} \int_{\partial B_2(-2\mathrm{i})} \frac{\mathrm{d}z}{z^2+1} \qquad \text{(b)} \int_{\partial B_1(0)} \mathrm{d}z\, \frac{\mathrm{e}^z}{(z-2)^3}$$

**Exercice 47.** Soient $f$ et $g$ les fonctions limites des séries entières centrées à l'origine et respectivement de rayons de convergence $s$ et $t$ et à coéfficients $a_n$ et $b_n$.
Montrer que, dans $B_r(0)$ avec $r := \min\{s, t\}$, le produit $fg$ a un développement en forme d'un **produit de Cauchy**, c.-à-d.,

$$(fg)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad \text{où} \quad c_n := \sum_{k+l=n} a_k b_l.$$

**Exercice 48.** Soient $a, b \in \mathbb{C}$ t.q. $|a| < 1$ et $|b| > 1$ et soient $n, m \in \mathbb{N}^*$. Calculer :

$$\int_{\partial \mathbb{E}} \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n (z-b)^m}$$