UNIVERSITÉ DE TOULON

UFR Sciences et Techniques

Fonctions analytiques – TD 10

W. Aschbacher (*http ://aschbacher.univ-tln.fr/*)

M65 L3 Cours du 2e semestre 2014 – 2015 (19x2h CM et 19x2h TD)

Licence Mathématiques

Exercice 37. Soient $r, s > 0$ fixés et $\gamma := [-r-\mathrm{i}s, r-\mathrm{i}s]+[r-\mathrm{i}s, r+\mathrm{i}s]+[r+\mathrm{i}s, -r+\mathrm{i}s]+[-r+\mathrm{i}s, -r-\mathrm{i}s]$. Montrer :

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} = 2\pi\mathrm{i}$$

<u>Solution</u> Soient $z_1 := z_5 := -r-\mathrm{i}s$, $z_2 := r-\mathrm{i}s$, $z_3 := r+\mathrm{i}s$ et $z_4 := -r+\mathrm{i}s$. Alors, d'après la notation de Ex. 6.3 *(b)*, les courbes $\gamma_i : [0,1] \to \mathbb{C}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, 4\}$ sont définies, pour tout $t \in [0,1]$, par

$$\gamma_i(t) := (1-t)z_i + tz_{i+1}.$$

En utilisant Déf. 6.4, nous pouvons donc écrire

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} = \sum_{i=1}^4 \int_{\gamma_i} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \sum_{i=1}^4 \int_0^1 \mathrm{d}t\, \frac{\gamma_i'(t)}{\gamma_i(t)}.$$

Pour le premier terme, nous calculons

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \mathrm{d}t\, \frac{\gamma_1'(t)}{\gamma_1(t)} &= \int_0^1 \mathrm{d}t\, \frac{2r}{2rt-r-\mathrm{i}s} = \frac{2r}{s}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\frac{r}{s}(2t-1)-\mathrm{i}} \overset{x\,=\,\frac{r}{s}(2t-1)}{=} \int_{-\frac{r}{s}}^{\frac{r}{s}} \frac{\mathrm{d}x}{x-\mathrm{i}} = \int_{-\frac{r}{s}}^{\frac{r}{s}} \mathrm{d}x\, \frac{x+\mathrm{i}}{x^2+1} \\
&= \int_{-\frac{r}{s}}^{\frac{r}{s}} \mathrm{d}x\, \frac{x}{x^2+1} + \mathrm{i}\int_{-\frac{r}{s}}^{\frac{r}{s}} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \underbrace{\left[\frac{1}{2}\log(x^2+1)\right]_{-\frac{r}{s}}^{\frac{r}{s}}}_{=\,0} + \mathrm{i}\left[\arctan(x)\right]_{-\frac{r}{s}}^{\frac{r}{s}} \\
&= 2\mathrm{i}\arctan\left(\frac{r}{s}\right).
\end{aligned}$$

Ensuite, nous obtenons

$$\int_0^1 \mathrm{d}t\,\frac{\gamma_2'(t)}{\gamma_2(t)} = \int_0^1 \mathrm{d}t\,\frac{2\mathrm{i}s}{2\mathrm{i}st + r - \mathrm{i}s} = \frac{2s}{r}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\frac{s}{r}(2t-1) - \mathrm{i}} = 2\mathrm{i}\arctan\Big(\frac{s}{r}\Big).$$

En ce qui concerne les autres intégrales, on a

$$\int_0^1 \mathrm{d}t\,\frac{\gamma_3'(t)}{\gamma_3(t)} = \int_0^1 \mathrm{d}t\,\frac{-2r}{-2rt + r + \mathrm{i}s} = \int_0^1 \mathrm{d}t\,\frac{\gamma_1'(t)}{\gamma_1(t)},$$
$$\int_0^1 \mathrm{d}t\,\frac{\gamma_4'(t)}{\gamma_4(t)} = \int_0^1 \mathrm{d}t\,\frac{-2\mathrm{i}s}{-2\mathrm{i}st - r + \mathrm{i}s} = \int_0^1 \mathrm{d}t\,\frac{\gamma_2'(t)}{\gamma_2(t)}.$$

Il en résulte que

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} = 4\mathrm{i}\underbrace{\Big(\arctan\Big(\frac{s}{r}\Big) + \arctan\Big(\frac{r}{s}\Big)\Big)}_{=\frac{\pi}{2}},$$

où nous avons utilisé l'équation fonctionnelle $\arctan(x)+\arctan(1/x) = \pi/2$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Remarque : Le choix du paramétrage des courbes est libre (cf. Prop. 6.8). P.ex., nous aurions également pu choisir le paramétrage $\gamma_1 : [-r, r] \to \mathbb{C}$ défini par $\gamma_1(t) := t - \mathrm{i}s$ pour tout $t \in [-r, r]$ (et de manière analogue pour $\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$).

□

Exercice 38.

(a) Soit $\gamma : I \to \mathbb{C}$ une courbe, $-\gamma$ la courbe inversée et $f \in C(|\gamma|)$. Montrer :

$$\int_{-\gamma} \mathrm{d}z\, f(z) = -\int_\gamma \mathrm{d}z\, f(z)$$

(b) Soit $g : D_2 \to D_1$ holomorphe et g' continu. En plus, soit γ_2 une courbe dans D_2, $\gamma_1 := g \circ \gamma_2$ et $f \in C(|\gamma_1|)$. Montrer :

$$\int_{\gamma_1} \mathrm{d}z\, f(z) = \int_{\gamma_2} \mathrm{d}z\, f(g(z))g'(z)$$

Solution

(a) Nous pouvons nous restreindre à une courbe γ qui consiste en un seul morceau. Alors, comme $-\gamma = \gamma \circ \psi : I \to \mathbb{C}$, où $\psi : I \to I$ est défini par $\psi(t) = a + b - t$ pour tout $t \in I$ (et $I = [a, b]$), on calcule que, pour tout $f \in C(|\gamma|)$,

$$\int_{-\gamma} \mathrm{d}z\, f(z) = \int_a^b \mathrm{d}t\, f([-\gamma](t))[-\gamma]'(t) = \int_a^b \mathrm{d}t\, f(\gamma(\psi(t)))\gamma'(\psi(t))\psi'(t)$$
$$\overset{s\,=\,\psi(t)}{=} \int_b^a \mathrm{d}s\, f(\gamma(s))\gamma'(s) = -\int_a^b \mathrm{d}s\, f(\gamma(s))\gamma'(s) = -\int_\gamma \mathrm{d}z\, f(z).$$

(b) Nous pouvons nous restreindre à une courbe $\gamma_2 : I \to \mathbb{C}$ qui consiste en un seul morceau. Alors, pour tout $f \in C(|\gamma_1|)$, on a

$$\int_{\gamma_1} \mathrm{d}z\, f(z) = \int_a^b \mathrm{d}t\, f(\gamma_1(t))\gamma_1'(t) = \int_a^b \mathrm{d}t\, f(g(\gamma_2(t)))g'(\gamma_2(t))\gamma_2'(t) = \int_{\gamma_2} \mathrm{d}z\, f(g(z))g'(z).$$

□

Exercice 39. Soit $F \in \mathcal{O}(D)$ et $F' = 0$ dans D. Montrer que F est localement constant.

Solution *Indication :* Utiliser Thm. 6.15.

Soit $c \in D$. Comme D est une sous-ensemble ouvert de $\mathbb{C}$, il existe $r > 0$ t.q. $B_r(c) \subseteq D$. Alors, comme $f := F' = 0 \in C(D)$ et comme F est une primitive de f, Thm. 6.15 nous fournit que, pour tout $z \in B_r(c)$,

$$0 = \int_{[c,z]} \mathrm{d}\zeta\, F'(\zeta) = \int_{[c,z]} \mathrm{d}\zeta\, f(\zeta) = F(z) - F(c),$$

c.-à-d., on obtient que $F(z) = F(c)$ pour tout $z \in B_r(c)$.

Remarque : On pourrait également utiliser Prop. 2.30.

□

Exercice 40. Soit $D := \mathbb{C} \setminus [0,1]$ et soit $f : D \to \mathbb{C}$ défini, pour tout $z \in D$, par

$$f(z) := \frac{1}{z(z-1)}.$$

Montrer que, pour toute courbe fermée γ dans D, on a

$$\int_\gamma \mathrm{d}z\, f(z) = 0.$$

Solution Afin de pouvoir utiliser le critère de $\mathbb{C}$-intégrabilité de Prop. 6.17, nous voulons montrer que f est $\mathbb{C}$-intégrable dans D, c.-à-d., que $f \in C(D)$ et qu'il existe $F \in \mathcal{O}(D)$ t.q. $F' = f$ dans D (cf. Déf. 6.14). Soit alors $g : D \to \mathbb{C}$ défini, pour tout $z \in D$, par

$$g(z) := \frac{z-1}{z} = 1 - \frac{1}{z}.$$

Comme nous voulons définir que, pour tout $z \in D$,

$$F(z) := \log(g(z)),$$

il faut que nous nous assurions que $g(D) \subseteq \mathbb{C}^-$ parce que $\mathbb{C}^-$ est le domaine de définition de la branche principale du logarithme $\log$. Pour ce faire, supposons qu'il existe $z \in D$ t.q. $g(z) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{C}^-$. Si on écrit $z = x + \mathrm{i}y \in D$, on obtient alors

$$\mathrm{Re}(g(z)) = 1 - \frac{x}{x^2 + y^2} \leq 0, \qquad \mathrm{Im}(g(z)) = \frac{y}{x^2 + y^2} = 0,$$

d'où il résulte que $y = 0$ et $1 - 1/x \leq 0$. D'autre part, comme, pour tout $z = x + \mathrm{i}y \in D$, on a $x < 0$ ou $x > 1$ si $y = 0$, on trouve respectivement $1 - 1/x > 1$ ou $1 - 1/x > 0$ ce qui est en contradiction avec $1 - 1/x \leq 0$. Alors, F est bien défini dans D, on a $F \in \mathcal{O}(D)$ et F est une primitive de f parce que, pour tout $z \in D$, on calcule

$$F'(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \log(g(z)) = \frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{z}{z-1} \frac{1}{z^2} = f(z).$$

Le critère de $\mathbb{C}$-intégrabilité de Prop. 6.17 fournit alors l'énoncé. $\square$