UFR Sciences et Techniques

Fonctions analytiques – TD 7

W. Aschbacher (*http ://aschbacher.univ-tln.fr/*)

M65 L3 Cours du 2e semestre 2014 – 2015 (19x2h CM et 19x2h TD)

Licence Mathématiques

Exercice 25. Soit R le rayon de convergence et f la fonction limite de la série entière $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$. Montrer :

(a) $R = 1$

(b) $f \in \mathcal{O}(\mathbb{E})$

(c) $f : \mathbb{E} \xrightarrow{\sim} f(\mathbb{E})$

(d) f conserve les angles et l'orientation en $\mathbb{E}$.

Solution

(a) Comme $a_n := n \neq 0$ pour presque tout $n \in \mathbb{N}$, la règle de d'Alembert fournit $R = 1$.

(b) D'après Thm. 4.16 *(a)*, la fonction limite f est holomorphe en $B_R(0) = \mathbb{E}$.

(c) Pour tout $z \in \mathbb{E}$, la série entière $g(z) := \sum_{n=1}^{\infty} z^{n+1}$ a la forme

$$g(z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right) - (1+z) = \frac{1}{1-z} - (1+z) = \frac{z^2}{1-z}. \tag{1}$$

En plus, d'après Thm. 4.16 *(b)*, on peut écrire

$$g'(z) \overset{\text{Thm. 4.16 (b)}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)z^n = f(z) + \sum_{n=1}^{\infty} z^n = f(z) + \left(\frac{1}{1-z} - 1\right).$$

D'autre part, en utilisant (1), on a $g'(z) = z(2-z)/(1-z)^2$. Il en résulte que, pour tout $z \in \mathbb{E}$,

$$f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}. \tag{2}$$

D'après Rem. 2.26 *(a)*, on a $f : \mathbb{E} \xrightarrow{\sim} f(\mathbb{E})$ si f est injectif. Soient donc $z, w \in \mathbb{E}$ t.q. $f(z) = f(w)$. Alors, en utilisant (2), on obtient

$$(zw - 1)(z - w) = 0.$$

Comme $z, w \in \mathbb{E}$, on trouve $z = w$, c.-à-d., f est injectif.

Remarque : On peut montrer que $f(\mathbb{E}) = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} \,|\, z \leq -\frac{1}{4}\}$.

(d) D'après Thm. 2.22 et comme, pour tout $z \in \mathbb{E}$, on a

$$f'(z) = \frac{1+z}{(1-z)^3} \neq 0,$$

la fonction f conserve les angles et l'orientation en $\mathbb{E}$.

□

Exercice 26. Soit D connexe et $f \in \mathcal{O}(D)$. Montrer que les énoncés suivants sont équivalents :

(a) Il existe $a, b \in \mathbb{C}$ t.q. $f(z) = a\mathrm{e}^{bz}$ pour tout $z \in D$.

(b) Il existe $b \in \mathbb{C}$ t.q. $f'(z) = bf(z)$ pour tout $z \in D$.

Solution

(a) $\Rightarrow$ *(b)* : On a $f'(z) = ab\mathrm{e}^{bz} = bf(z)$ pour tout $z \in D$.

(b) $\Rightarrow$ *(a)* : Soit $g \in \mathcal{O}(D)$ défini par $g(z) := f(z)\mathrm{e}^{-bz}$ pour tout $z \in D$. Alors, pour tout $z \in D$, on a

$$g'(z) = f'(z)\mathrm{e}^{-bz} - bf(z)\mathrm{e}^{-bz} = 0.$$

En utilisant Prop. 2.30, il s'ensuit qu'il existe une constante complexe, appelons-la $a \in \mathbb{C}$, t.q. $g(z) = a$ pour tout $z \in D$. Finalement, Prop. 5.1 implique que $f(z) = a\mathrm{e}^{bz}$ pour tout $z \in D$.

□

Exercice 27. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ t.q. $\sin(z/2) \neq 0$, on a

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kz) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)z\right)}{2\sin\left(\frac{z}{2}\right)}.$$

Solution D'après la formule d'Euler de Prop. 4.10, on a $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z} = \cos(-z) + \mathrm{i}\sin(-z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. En plus, d'après la définition des fonctions trigonométriques par leurs séries entières, on a $\cos(-z) = \cos(z)$ et $\sin(-z) = -\sin(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Il en résulte que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\cos(kz) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz}\right).$$

En utilisant plusieurs fois le théorème d'addition de Prop. 5.4 et la formule de la série géométrique finie, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(kz) &= \frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nz}\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nz}\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2n}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\right)^k = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nz}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n+1)z}-1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-1}\\ &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nz}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mathrm{i}z}}{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mathrm{i}z}}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n+1)z}-1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-1} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(n+\frac{1}{2}\right)z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(n+\frac{1}{2}\right)z}}{2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mathrm{i}z}\right)}.\end{aligned}$$

Comme $\sin(z) = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})/(2\mathrm{i})$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, on arrive à la conclusion. □

Exercice 28. Montrer que les fonctions trigonométriques ont les propriétés suivantes :

(a) $\sin$ et $\cos$ admettent toute valeur dans $\mathbb{C}$ exactement un nombre infini dénombrable de fois.

(b) L'ensemble des zéros de $\sin$ est égal à $\{m\pi \mid m \in \mathbb{Z}\}$ et l'ensemble des zéros de $\cos$ est égal à $\{(m + \frac{1}{2})\pi \mid m \in \mathbb{Z}\}$.

(c) $\mathrm{per}(\sin) = \mathrm{per}(\cos) = 2\pi\mathbb{Z}$

Solution

(a) Pour tout $c \in \mathbb{C}$, l'équation $c = \cos(z)$ se réécrit comme

$$\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\right)^2 - 2c\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + 1 = 0.$$

D'après le théorème de d'Alembert-Gauss (également appelé le théorème fondamental de l'algèbre), l'équation $w^2 - 2cw + 1 = 0$ admet exactement deux racines $w_0, w_1 \neq 0$. Comme, d'après Prop. 5.7, la fonction exponentielle est une application surjective de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^*$, il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ t.q. $w_0 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}z_0}$ d'où alors

$$c = \cos(z_0).$$

Comme le même argument s'applique également à w_1, et comme, d'après Prop. 5.7, on a $\ker(\exp) = 2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}$, on arrive à l'énoncé. La fonction $\sin$ est traitée de manière analogue.

(b) Comme $2\mathrm{i}\sin(z) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z} - 1)$ et $2\cos(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi - z)}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(z-\pi/2)} - 1)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ (où nous avons utilisé que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$), on obtient

$$\begin{aligned}\sin(z) = 0 \quad &\iff \quad 2\mathrm{i}z \in \ker(\exp) = 2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z} \quad \iff \quad z \in \pi\mathbb{Z},\\ \cos(z) = 0 \quad &\iff \quad 2\mathrm{i}\left(z - \tfrac{\pi}{2}\right) \in \ker(\exp) = 2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z} \quad \iff \quad z \in \tfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

(c) Comme, pour tout $z, \omega \in \mathbb{C}$, nous avons

$$\cos(z+\omega) - \cos(z) = -2\sin\left(z + \tfrac{\omega}{2}\right)\sin\left(\tfrac{\omega}{2}\right),$$

on trouve que $\omega \in \operatorname{per}(\cos)$ ssi $\sin(\omega/2) = 0$, c.-à-d., d'après *(b)*, ssi $\omega \in 2\pi\mathbb{Z}$. Comme $\sin(z+\omega) - \sin(z) = 2\cos(z+\omega/2)\sin(\omega/2)$ pour tout $z, \omega \in \mathbb{C}$, on arrive à l'énoncé.

$\square$