UNIVERSITÉ DE TOULON
UFR Sciences et Techniques

Fonctions analytiques – TD 6

W. Aschbacher (*http ://aschbacher.univ-tln.fr/*)

M65 L3 Cours du 2e semestre 2014 – 2015 (19x2h CM et 19x2h TD)

Licence Mathématiques

Exercice 21. Montrer que, si la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge au point $z_0 \neq 0$, elle converge normalement dans $B_{|z_0|}$.

Exercice 22. Montrer que la série exponentielle et les séries trigonométriques sont holomorphes en $\mathbb{C}$ et qu'elles satisfont la formule d'Euler, c.-à-d., pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \cos(z) + \mathrm{i}\sin(z).$$

Exercice 23. Montrer que, pour tout $\sigma \in \mathbb{C}$, la série binomiale satisfait $b_\sigma \in \mathcal{O}(\mathbb{E})$ et que, pour tout $\sigma \in \mathbb{C}$ et tout $z \in \mathbb{E}$, on a

$$b'_\sigma(z) = \sigma b_{\sigma-1}(z) = \frac{\sigma}{1+z}\, b_\sigma(z).$$

Exercice 24. Montrer que les séries exponentielles, logarithmiques et binomiales sont reliéesentre elles, c.-à-d., que, pour tout $\sigma \in \mathbb{C}$ et tout $z \in \mathbb{E}$, on a

$$b_\sigma(z) = \mathrm{e}^{\sigma\lambda(z)}.$$

Montrer notamment que, pour $\sigma = 1$ et tout $z \in \mathbb{E}$, on a

$$\mathrm{e}^{\lambda(z)} = 1 + z.$$