UNIVERSITÉ DE TOULON

UFR Sciences et Techniques

Fonctions analytiques – TD 5

W. Aschbacher (*http ://aschbacher.univ-tln.fr/*)

M65 L3 Cours du 2e semestre semestre 2014 – 2015 (19x2h CM et 19x2h TD)

Licence Mathématiques

Exercice 17. Soit $f_n : D \to \mathbb{C}$ une suite de fonctions, $A \subseteq D$ et $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres non négatifs t.q.

$$|f_n|_A \leq M_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ et } \sum_{n=0}^{\infty} M_n < \infty.$$

Montrer que $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformément dans A (**Critère de Weierstrass**).

Exercice 18. Soit $D := \mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}\mu \,|\, \mu^2 \in \mathbb{N}^*\}$ et soit $f_n : D \to \mathbb{C}$ défini, pour tout $z \in D$, par

$$f_n(z) := \frac{(-1)^n}{z^2 + n}.$$

Montrer :

(a) La série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformément dans $\mathbb{R}$.

(b) Elle ne converge absolument en aucun point de $\mathbb{R}$.

(c) Elle possède un réarrangement divergent.

Exercice 19. Soit $f_n : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ défini, pour tout $z \in \mathbb{E}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, par

$$f_n(z) := \frac{z^{2n}}{1 - z^n}.$$

Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge normalement dans $\mathbb{E}$.

Exercice 20. Soit $w \in \mathbb{C}$ et $s > 0$ et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions $f_n : B_s(w) \to \mathbb{C}$ t.q., pour tout $r > 0$ avec $r < s$, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|_{B_r(w)} < \infty.$$

Montrer que $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge normalement dans $B_s(w)$.