UNIVERSITÉ DE TOULON
UFR Sciences et Techniques

Fonctions analytiques – TD 2

W. Aschbacher (*http ://aschbacher.univ-tln.fr/*)

M65 L3 Cours du 2e semestre semestre 2014 – 2015 (19x2h CM et 19x2h TD)

Licence Mathématiques

Exercice 5. Soient les fonctions $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ données, pour tout $z \in \mathbb{C}$, par :

(a) $f(z) = \bar{z}$

(b) $g(z) = \mathrm{Re}(z)$

Montrer que f et g ne sont nulle part $\mathbb{C}$-dérivable en $\mathbb{C}$.

<u>Solution</u>

(a) Soit $c \in \mathbb{C}$. Alors, pour tout $h \in \mathbb{C}^*$, on peut écrire

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \frac{\bar{h}}{h}.$$

Il s'ensuit que, comme $\bar{h}/h = 1$ pour $h \in \mathbb{R}$ et $\bar{h}/h = -1$ pour $h \in \mathrm{i}\mathbb{R} := \{\mathrm{i}r \,|\, r \in \mathbb{R}\}$, ce quotient ne possède pas de limite pour $h \to 0$.

(b) Soit $c \in \mathbb{C}$. Alors, pour tout $h \in \mathbb{C}^*$, on peut écrire

$$\frac{g(c+h) - g(c)}{h} = \frac{\mathrm{Re}(h)}{h}.$$

Il s'ensuit que, comme $\mathrm{Re}(h)/h = 1$ pour $h \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{Re}(h)/h = 0$ pour $h \in \mathrm{i}\mathbb{R}$, ce quotient ne possède pas de limite pour $h \to 0$.

$\square$

Exercice 6. Soient les fonctions $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ données, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, par

$$u(x, y) = x^3 y^2, \qquad v(x, y) = x^2 y^3.$$

En quels points de $\mathbb{C}$, la fonction $f = u + \mathrm{i}v$ est-elle $\mathbb{C}$-dérivable ?

Solution La fonction f est $\mathbb{R}$-dérivable partout en $D = \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ parce que u et v sont partout continûment partiellement dérivables (étant des polynômes, cf . Rap. 2.36 *(e)*). Les ECR au point $c = (a, b)$ ont la forme

$$\underbrace{u_x(c)}_{=3a^2b^2} = \underbrace{v_y(c)}_{=3a^2b^2}, \qquad \underbrace{u_y(c)}_{=2a^3b} = - \underbrace{v_x(c)}_{=-2ab^3}.$$

Alors, on obtient $ab(a^2 + b^2) = 0$ et donc, f est $\mathbb{C}$-dérivable au point (a, b) ssi $ab = 0$, c.-à-d., f est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point sur les axes de coordonnées. □

Exercice 7. Soit $f = u + \mathrm{i}v$ une fonction $\mathbb{C}$-dérivable en tout point de D.

(a) Alors, le déterminant de sa matrice jacobienne est non négatif en tout point $c \in D$,

$$\det(J_f(c)) \geq 0.$$

(b) Soient u et v deux fois continûment partiellement dérivables en tout point de D. Alors, u et v sont des fonctions harmoniques.

Solution

(a) D'après Déf. 2.4 et en utilisant Thm. 2.5, nous pouvons écrire

$$\det(J_f(c)) = \det \begin{bmatrix} u_x(c) & u_y(c) \\ v_x(c) & v_y(c) \end{bmatrix} = u_x(c)v_y(c) - u_y(c)v_x(c) = u_x(c)^2 + v_x(c)^2 = |f'(c)|^2 \\ \geq 0.$$

(b) Les ECR impliquent que $u_{xx} = v_{xy}$, $u_{xy} = -v_{xx}$, $u_{yx} = v_{yy}$ et $u_{yy} = -v_{yx}$. Il en résulte que

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = v_{xy} - v_{yx},$$
$$\Delta v = v_{xx} + v_{yy} = u_{yx} - u_{xy}.$$

Comme, par hypothèse, u et v sont deux fois continûment partiellement dérivables, le théorème de Schwarz nous fournit l'énoncé.

□

Exercice 8. Soit $u : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}$ défini par $u(z) := \log |z|$ pour tout $z \in \mathbb{C}^*$. Alors :

(a) u est harmonique en $\mathbb{C}^*$.

(b) u ne peut être la partie réelle d'une fonction $\mathbb{C}$-dérivable dans $\mathbb{C}^*$.

<u>Solution</u>

(a) La fonction u est harmonique parce que

$$\Delta u(z) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \log \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \underbrace{\frac{x}{x^2 + y^2}}_{= u_x(z)} + \frac{\partial}{\partial y} \underbrace{\frac{y}{x^2 + y^2}}_{= u_y(z)}$$

$$= \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0.$$

(b) Supposons que u soit la partie réelle d'une fonction $\mathbb{C}$-dérivable f, c.-à-d., $f = u + \mathrm{i}v$ pour une fonction $v : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}$. Alors, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, les ECR $v_x(z) = -u_y(z)$ et $v_y(z) = u_x(z)$ impliquent que

$$v_x(z) = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \qquad v_y(z) = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

c.-à-d., que $F(x, y) := (-y/(x^2+y^2), x/(x^2+y^2)) = (\nabla v)(x, y)$ est un champ de gradient. Alors, d'après le cours d'analyse réelle, l'intégrale le long de tout chemin (continûment dérivable) fermé doit être égale à zéro. En choisissant le chemin $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, défini, pour tout $t \in [0, 2\pi]$, par $\gamma(t) := (\cos t, \sin t)$, on obtient

$$\oint_\gamma F \cdot \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t \; F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t \; (\sin^2 t + \cos^2 t) = 2\pi \neq 0.$$

Alors, F n'est pas un champ de gradient et donc, u ne peut être la partie réelle d'une fonction $\mathbb{C}$-dérivable .

□