UNIVERSITÉ DE TOULON
UFR Sciences et Techniques

Fonctions analytiques – TD 2

W. Aschbacher (*http ://aschbacher.univ-tln.fr/*)

M65 L3 Cours du 2e semestre semestre 2014 – 2015 (19x2h CM et 19x2h TD)

Licence Mathématiques

Exercice 5. Soient les fonctions $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ données, pour tout $z \in \mathbb{C}$, par :

(a) $f(z) = \bar{z}$

(b) $g(z) = \mathrm{Re}(z)$

Montrer que f et g ne sont nulle part $\mathbb{C}$-dérivable en $\mathbb{C}$.

Exercice 6. Soient les fonctions $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ données, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, par

$$u(x, y) = x^3y^2, \qquad v(x, y) = x^2y^3.$$

En quels points de $\mathbb{C}$, la fonction $f = u + \mathrm{i}v$ est-elle $\mathbb{C}$-dérivable ?

Exercice 7. Soit $f = u + \mathrm{i}v$ une fonction $\mathbb{C}$-dérivable en tout point de D.

(a) Alors, le déterminant de sa matrice jacobienne est non négatif en tout point $c \in D$,

$$\det(J_f(c)) \geq 0.$$

(b) Soient u et v deux fois continûment partiellement dérivables en tout point de D. Alors, u et v sont des fonctions harmoniques.

Exercice 8. Soit $u : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}$ défini par $u(z) := \log |z|$ pour tout $z \in \mathbb{C}^*$. Alors :

(a) u est harmonique en $\mathbb{C}^*$.

(b) u ne peut être la partie réelle d'une fonction $\mathbb{C}$-dérivable dans $\mathbb{C}^*$.