UNIVERSITÉ DE TOULON
UFR Sciences et Techniques

Fonctions analytiques

M65 L3 Cours du 2e semestre 2014 – 2015 *Licence Mathématiques* (W. Aschbacher)

Examen du 23/03/2015 (Contrôle continu)
Durée : 90 minutes.
Matériel autorisé : Un aide-mémoire constitué d'une seule feuille A4 recto-verso.

Questions à choix multiple

Nota bene : Un point n'est accordé que si, pour chaque question, tous les items sont correctement cochés. Il n'y aura pas de demi-points ou de points négatifs.

Lesquels des énoncés suivants sont justes ?

Question 1. [1.0] Soit $f \in \mathcal{O}(D)$ et $c \in D$.
☐ f conserve l'orientation en c.
☒ Si f est injectif, f est biholomorphe de D dans $f(D)$.
☒ $\mathrm{Re}(f)$ est harmonique en c.

Solution
☐ Déf. 2.20 et Rem. 2.21
☒ Rem. 2.26 *(a)* (et Exr. 58)
☒ Thm. 7.10 et Prop. 2.8 *(b)* (et Exr. 7 *(b)*) ☐

Question 2. [1.0] Soit $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ une série de fonctions $f_n : D \to \mathbb{C}$ qui converge normalement.
☐ Il existe des permutations $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ t.q. $\sum_{n=0}^{\infty} f_{\sigma(n)} \neq \sum_{n=0}^{\infty} f_n$.
☒ Tout $c \in D$ a un voisinage $U \subseteq D$ t.q. $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|_U < \infty$.
☒ $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge localement uniformément dans D.

Solution
☐ Thm. 3.15
☒ Déf. 3.12
☒ Prop. 3.14 *(a)* ☐

Question 3. [1.0] Soit $\log : \mathbb{C}^- \to \mathbb{C}$ la branche principale du logarithme et $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^-)$.

☐ Si $\mathrm{e}^{f(z)} = z$ pour tout $z \in \mathbb{C}^-$, alors $f = \log$.

☒ $\log(\mathrm{e}^z) = z + 2\pi\mathrm{i}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $-3\pi < \mathrm{Im}(z) < -\pi$

☐ $\log(wz) = \log(w) + \log(z)$ pour tout $w, z, wz \in \mathbb{C}^-$

Solution

☐ Déf. 5.9 et Prop. 5.11

☒ Prop. 5.19 *(b)*

☐ Prop. 5.19 *(a)* ☐

Question 4. [1.0] Le théorème de Cauchy-Taylor établit l'analyticité des fonctions holomorphes. Quels sont les deux ingrédients principaux de sa démonstration ?

Solution

Le lemme de développement (Prop. 7.9) et la formule intégrale de Cauchy pour les disques (Thm. 7.6). ☐

Questions ouvertes

Nota bene : Les réponses à toutes les questions sont à justifier.
Le barème n'est donné qu'à titre indicatif.

Question 5.

(a) [2.0] Soit $f \in \mathcal{O}(D)$ et $0 \in D$. En plus, soit $r > 0$ t.q. $\overline{B_r(0)} \subseteq D$ et soient $a_1, a_2 \in B_r(0)$ avec $a_1 \neq a_2$. Montrer :

$$\frac{a_1 - a_2}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\partial B_r(0)} \mathrm{d}z \, \frac{f(z)}{(z-a_1)(z-a_2)} = f(a_1) - f(a_2).$$

Indication : Utiliser les intégrales $\int_{\partial B_r(0)} \mathrm{d}z \, f(z)/(z-a_i)$ pour tout $i \in \{1, 2\}$.

(b) [4.0] Démontrer le **théorème de Liouville** en utilisant *(a)*.

Indication : Utiliser l'estimation standard.

Solution

(a) En utilisant l'indication, nous écrivons

$$\frac{1}{z-a_1} - \frac{1}{z-a_2} = \frac{a_1-a_2}{(z-a_1)(z-a_2)}.$$

Alors, nous obtenons la décomposition

$$(a_1-a_2)\int_{\partial B_r(0)} \mathrm{d}z\, \frac{f(z)}{(z-a_1)(z-a_2)} = \underbrace{\int_{\partial B_r(0)} \mathrm{d}z\, \frac{f(z)}{z-a_1}}_{=2\pi\mathrm{i}f(a_1)} - \underbrace{\int_{\partial B_r(0)} \mathrm{d}z\, \frac{f(z)}{z-a_2}}_{=2\pi\mathrm{i}f(a_2)},$$

où nous avons pu utiliser la formule intégrale de Cauchy car $\overline{B_r(0)} \subseteq D$ (cf. Thm. 7.6).

(b) Le théorème de Liouville (cf. Thm. 8.6) énonce que toute fonction entière bornée est constante. Soit alors $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ borné. Comme $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, la partie *(a)* implique, pour tout $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ avec $a_1 \neq a_2$ et tout $r > 0$ t.q. $a_1, a_2 \in B_r(0)$, que

$$\begin{aligned} |f(a_1) - f(a_2)| &= \frac{|a_1-a_2|}{2\pi} \left| \int_{\partial B_r(0)} \mathrm{d}z\, \frac{f(z)}{(z-a_1)(z-a_2)} \right| \\ &\leq \frac{|a_1-a_2|}{2\pi}\, 2\pi r\, |f|_{\partial B_r(0)} \sup_{z\in\partial B_r(0)} \frac{1}{|z-a_1||z-a_2|}, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé l'estimation standard. Comme $|z-a_i| \geq |z| - |a_i| = r - |a_i| > 0$ pour tout $i \in \{1,2\}$ et comme, par hypothèse, f est borné, c.-à-d., qu'il existe $M > 0$ t.q. $|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, nous avons

$$|f(a_1) - f(a_2)| \leq M|a_1-a_2|\, \frac{r}{(r-|a_1|)(r-|a_2|)} = \frac{M|a_1-a_2|}{\left(1-\frac{|a_1|}{r}\right)\left(1-\frac{|a_1|}{r}\right)} \frac{1}{r}.$$

En prenant la limite $r \to \infty$, nous obtenons que $f(a_1) - f(a_2) = 0$.

□

Question 6. Soit $r > 0$ et soit γ une courbe non fermée qui parcourt, dans le sens positif, le contour suivant donné par :

(a) [5.5] La partie droite, entre $-r\mathrm{i}$ et $r\mathrm{i}$, du bord du disque de rayon r centré à l'origine.

(b) [4.5] Le partie droite, entre $-r\mathrm{i}$ et $r\mathrm{i}$, du bord du rectangle de sommets $r(1+\mathrm{i})$, $r\mathrm{i}$, $-r\mathrm{i}$ et $r(1-\mathrm{i})$ (c.-à-d., les deux segments horizontaux et le segment vertical à droite).

Pour les deux cas, calculer :

$$\int_\gamma \mathrm{d}z\ z^{\mathrm{i}}$$

Indication : Noter que la courbe de *(a)* a le même point de départ que la courbe de *(b)* et que la courbe de *(a)* a le même point d'arrivée que la courbe de *(b)*.

Solution

(a) Nous pouvons paramétrer ce contour par la courbe $\gamma : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{C}$ définie par $\gamma(t) := r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ pour tout $t \in [-\pi/2, \pi/2]$. Alors, comme $\gamma(t) \in \mathbb{C}^-$ pour tout $t \in [-\pi/2, \pi/2]$, la fonction puissance sous l'intégrale est bien définie, c.-à-d., nous avons, pour tout $t \in [-\pi/2, \pi/2]$,

$$\gamma(t)^{\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\log(\gamma(t))},$$

et la branche principale du logarithme $\log : \mathbb{C}^- \to \mathbb{C}$ est donnée par

$$\log(\gamma(t)) = \ln(|\gamma(t)|) + \mathrm{i}\arg(\gamma(t)),$$

où $-\pi < \arg(\gamma(t)) < \pi$. En utilisant le paramétrage, nous obtenons $\log(\gamma(t)) = \ln(r) + \mathrm{i}t$ et alors,

$$\begin{aligned}\int_\gamma \mathrm{d}z\; z^{\mathrm{i}} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t\, \gamma(t)^{\mathrm{i}}\gamma'(t) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\log(\gamma(t))}\gamma'(t) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\ln(r)+\mathrm{i}t)} r\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \\ &= r\mathrm{i}\, \underbrace{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ln(r)}}_{=r^{\mathrm{i}}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})t} = r\mathrm{i}\, r^{\mathrm{i}} \left[\frac{\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})t}}{-1+\mathrm{i}}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\frac{1}{2} r\mathrm{i}(1+\mathrm{i})r^{\mathrm{i}} \left[\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})\frac{\pi}{2}} - \mathrm{e}^{-(-1+\mathrm{i})\frac{\pi}{2}}\right] = -\frac{1}{2} r\mathrm{i}(1+\mathrm{i})r^{\mathrm{i}} \left[\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}} + \mathrm{i}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}\right] \\ &= (1+\mathrm{i})\, r^{1+\mathrm{i}} \cosh\left(\tfrac{\pi}{2}\right).\end{aligned}$$

Remarque : En utilisant les mêmes considérations que ci-dessus concernant la définition de $f(z) := z^{\mathrm{i}}$, nous pouvons également procéder de manière plus élégante en remarquant que z^{i} est $\mathbb{C}$-intégrable possédant $F(z) := z^{1+\mathrm{i}}/(1+\mathrm{i})$ comme primitive. Alors, d'après Thm. 6.15, nous obtenons que

$$\begin{aligned}\int_\gamma \mathrm{d}z\; z^{\mathrm{i}} &= F(\mathrm{i}r) - F(-\mathrm{i}r) = \frac{1}{1+\mathrm{i}}\left[(\mathrm{i}r)^{1+\mathrm{i}} - (-\mathrm{i}r)^{1+\mathrm{i}}\right] = \frac{1}{1+\mathrm{i}}\left[\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})\log(\mathrm{i}r)} - \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})\log(-\mathrm{i}r)}\right] \\ &= \frac{1}{1+\mathrm{i}}\left[\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})(\ln(r)+\pi/2)} - \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})(\ln(r)-\pi/2)}\right] = \frac{\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} r^{1+\mathrm{i}}\left[\mathrm{e}^{\pi/2} + \mathrm{e}^{-\pi/2}\right] \\ &= (1+\mathrm{i})\, r^{1+\mathrm{i}} \cosh\left(\tfrac{\pi}{2}\right).\end{aligned}$$

(b) Comme la courbe γ de *(a)* et toute courbe $\tilde{\gamma}$ qui parcourt le contour donné dans *(b)* ont le même point de départ et le même point d'arrivé et comme $\tilde{\gamma}$ est également une courbe dans $D := \mathbb{C}^-$, la courbe $\Gamma := \gamma - \tilde{\gamma}$ est une courbe fermée dans D. Comme D est un ouvert non vide qui est étoilé, comme la fonction $f : D \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) := z^{\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\log(z)}$ pour tout $z \in D$ est bien définie et satisfait $f \in \mathcal{O}(D)$ parce que f est une composition de fonctions holomorphes, nous pouvons appliquer le théorème intégral de Cauchy (cf.Thm. 7.2) qui nous garantit que

$$\int_\Gamma \mathrm{d}z\, f(z) = 0.$$

Mais, d'autre part, nous avons également que

$$\int_\Gamma \mathrm{d}z\, f(z) = \int_\gamma \mathrm{d}z\, f(z) + \int_{-\tilde{\gamma}} \mathrm{d}z\, f(z) = \int_\gamma \mathrm{d}z\, f(z) - \int_{\tilde{\gamma}} \mathrm{d}z\, f(z),$$

ce qui nous fournit que l'intégrale du cas *(b)* est égale à l'intégrale du cas *(a)*.
Remarque : Comme, d'après la remarque dans *(a)*, f possède une primitive, toute intégrale curviligne de f ne dépend que du point d'arrivée et du point de départ. Alors, sa valeur le long du chemin de *(a)* est la même que que sa valeur le long du chemin de *(b)*.

$\square$