UNIVERSITÉ DE TOULON
UFR Sciences et Techniques

Fonctions analytiques

M65 L3 Cours du 2e semestre 2014 – 2015 *Licence Mathématiques* (W. Aschbacher)

Examen du 23/03/2015 (Contrôle continu)
Durée : 90 minutes.
Matériel autorisé : Un aide-mémoire constitué d'une seule feuille A4 recto-verso.

Questions à choix multiple

Nota bene : Un point n'est accordé que si, pour chaque question, tous les items sont correctement cochés. Il n'y aura pas de demi-points ou de points négatifs.

Lesquels des énoncés suivants sont justes ?

Question 1. [1.0] Soit $f \in \mathcal{O}(D)$ et $c \in D$.
- ☐ f conserve l'orientation en c.
- ☐ Si f est injectif, f est biholomorphe de D dans $f(D)$.
- ☐ $\mathrm{Re}(f)$ est harmonique en c.

Question 2. [1.0] Soit $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ une série de fonctions $f_n : D \to \mathbb{C}$ qui converge normalement.
- ☐ Il existe des permutations $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ t.q. $\sum_{n=0}^{\infty} f_{\sigma(n)} \neq \sum_{n=0}^{\infty} f_n$.
- ☐ Tout $c \in D$ a un voisinage $U \subseteq D$ t.q. $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|_U < \infty$.
- ☐ $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge localement uniformément dans D.

Question 3. [1.0] Soit $\log : \mathbb{C}^- \to \mathbb{C}$ la branche principale du logarithme et $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^-)$.
- ☐ Si $\mathrm{e}^{f(z)} = z$ pour tout $z \in \mathbb{C}^-$, alors $f = \log$.
- ☐ $\log(\mathrm{e}^z) = z + 2\pi\mathrm{i}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $-3\pi < \mathrm{Im}(z) < -\pi$
- ☐ $\log(wz) = \log(w) + \log(z)$ pour tout $w, z, wz \in \mathbb{C}^-$

Question 4. [1.0] Le théorème de Cauchy-Taylor établit l'analyticité des fonctions holomorphes. Quels sont les deux ingrédients principaux de sa démonstration ?

Questions ouvertes

Nota bene : Les réponses à toutes les questions sont à justifier.
Le barème n'est donné qu'à titre indicatif.

Question 5.

(a) [2.0] Soit $f \in \mathcal{O}(D)$ et $0 \in D$. En plus, soit $r > 0$ t.q. $\overline{B_r(0)} \subseteq D$ et soient $a_1, a_2 \in B_r(0)$ avec $a_1 \neq a_2$. Montrer :

$$\frac{a_1 - a_2}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\partial B_r(0)} \mathrm{d}z \, \frac{f(z)}{(z - a_1)(z - a_2)} = f(a_1) - f(a_2).$$

Indication : Utiliser les intégrales $\int_{\partial B_r(0)} \mathrm{d}z \, f(z)/(z - a_i)$ pour tout $i \in \{1, 2\}$.

(b) [4.0] Démontrer le **théorème de Liouville** en utilisant *(a)*.

Indication : Utiliser l'estimation standard.

Question 6. Soit $r > 0$ et soit γ une courbe non fermée qui parcourt, dans le sens positif, le contour suivant donné par :

(a) [5.5] La partie droite, entre $-r\mathrm{i}$ et $r\mathrm{i}$, du bord du disque de rayon r centré à l'origine.

(b) [4.5] Le partie droite, entre $-r\mathrm{i}$ et $r\mathrm{i}$, du bord du rectangle de sommets $r(1 + \mathrm{i})$, $r\mathrm{i}$, $-r\mathrm{i}$ et $r(1 - \mathrm{i})$ (c.-à-d., les deux segments horizontaux et le segment vertical à droite).

Pour les deux cas, calculer :

$$\int_\gamma \mathrm{d}z \; z^{\mathrm{i}}$$

Indication : Noter que la courbe de *(a)* a le même point de départ que la courbe de *(b)* et que la courbe de *(a)* a le même point d'arrivée que la courbe de *(b)*.