UNIVERSITÉ DE TOULON
UFR Sciences et Techniques

Statistiques – TD 8

W. Aschbacher (*http://aschbacher.univ-tln.fr/*)

MB31 L2 Cours du 1er semestre 2013–2014 (6×2h CM et 8×1:30h TD)

Licence Biologie

Exercice 26. Un vaccin, injecté à des enfants, provoque, dans 1 cas sur 1000, une réaction d'allergie. Une ville de 800000 habitants compte 0.5% d'enfants en âge d'être vaccinés. On note X la vad correspondant au nombre d'enfants allergiques.

(a) Quelle est la loi de X (les enfants sont supposés indépendants p.r. à l'allergie) ?

(b) Comment peut-on approximer cette loi ?

(c) Utiliser cette approximation pour calculer les probabilités suivantes :

Trois enfants exactement sont allergiques.
Cinq enfants au moins sont allergiques.

Mots-clés : Loi binomiale, approximation par la loi de Poisson

Solution

(a) D'après Ex. 5.10 *(a)*, on a $\boxed{X \sim \mathcal{B}(n,p)}$, où

$$n = 800000 \cdot \frac{5}{1000} = \boxed{4000}$$

est le nombre d'enfants à vacciner, et

$$p = \boxed{\frac{1}{1000}}$$

la probabilité de réaction allergique (l'hypothèse d'indépendance est discutable, p.ex., pollution etc.). Nous rappelons que $\mathcal{B}(n,p)$ signifie que l'on répète n fois la même expérience, les répétitions étant indépendantes, et que l'on s'intéresse à la réalisation d'un événement A fixé de probabilité p dont le nombre de réalisations est décrit par la vad X.

(b) D'après Rem. 5.14, la loi de Poisson $\mathcal{P}(np)$ est une bonne approximation de la loi binomiale si

$$4000 = n \geq 30, \qquad \frac{1}{1000} = p \leq \frac{1}{10}, \qquad 4 = np \leq 10.$$

Alors, on peut approximer la loi binomiale par $\boxed{\mathcal{P}(4)}$.

(c) D'après Déf. 5.11, la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ est définie par

$$P(X = x) = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^x}{x!} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{N}.$$

Alors, pour le premier cas, on obtient

$$P(X = 3) = \mathrm{e}^{-4}\,\frac{4^3}{3!} \approx \boxed{19.5\%}.$$

Pour le deuxième cas, on trouve

$$\begin{aligned}
P(X \geq 5) = P_X(\{x \in \mathbb{N} \,|\, x \geq 5\}) &= P_X(\{x \in \mathbb{N} \,|\, x \leq 4\}^c) \overset{\text{En. 2.7 (b)}}{=} 1 - P_X(\{x \in \mathbb{N} \,|\, x \leq 4\}) \\
&= 1 - P_X(\textstyle\bigcup_{x \leq 4}\{x\}) \overset{\text{Déf. 2.6 (P3)}}{=} 1 - \displaystyle\sum_{x=0}^{4} P_X(\{x\}) = 1 - \sum_{x=0}^{4} P(X = x) \\
&= 1 - \mathrm{e}^{-4}\left(1 + 4 + 8 + \frac{32}{3} + \frac{32}{3}\right) = 1 - \frac{103}{3}\,\mathrm{e}^{-4} \approx \boxed{37.1\%}.
\end{aligned}$$

□

Exercice 27. La loi géométrique, est-elle sans mémoire ?

Mots-clés : Loi géométrique, non-vieillissement

Solution D'après Ex. 5.21, on doit montrer que

$$P(X > T + t \,|\, X > T) = P(X > t) \quad \text{pour tout } T, t \in \mathbb{N}.$$

En utilisant Déf. 2.11 de la probabilité conditionnelle, on peut écrire

$$\begin{aligned}
P(X > T + t \,|\, X > T) &= P(X^{-1}(]T + t, \infty[) \,|\, X^{-1}(]T, \infty[)) \\
&= \frac{P(X^{-1}(]T + t, \infty[) \cap X^{-1}(]T, \infty[))}{P(X^{-1}(]T, \infty[))} = \frac{P(X^{-1}(]T + t, \infty[))}{P(X^{-1}(]T, \infty[))} \\
&= \frac{P(X > T + t)}{P(X > T)}.
\end{aligned}$$

Le numérateur et le dénominateur sont de la forme $P(X > a)$ pour un $a \in \mathbb{N}$. Alors, en posant $q := 1 - p \in]0,1[$, on calcule

$$P(X > a) = P_X(\{x \in \mathbb{N}^* \,|\, x > a\}) = P_X(\bigcup_{x=a+1}^{\infty}\{x\}) = \sum_{x=a+1}^{\infty} P_X(x) = \sum_{x=a+1}^{\infty} P(X = x)$$

$$\overset{\text{Déf. 5.15}}{=} \sum_{x=a+1}^{\infty} pq^{x-1} = pq^a \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} q^n}_{=\frac{1}{1-q}=\frac{1}{p}} = q^a,$$

où nous avons utilisé la série géometrique $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1/(1-q)$ pour tout $q \in \mathbb{R}$ avec $|q| < 1$. Alors, pour tout $T, t \in \mathbb{N}$, nous obtenons

$$P(X > T + t \,|\, X > T) = \frac{q^{T+t}}{q^T} = q^t = P(X > t).$$

□

Exercice 28. Une entreprise distribue un certain aliment dans une boîte métallique dont le poids, après remplissage, est en moyenne de $340g$. Ce poids peut s'interpréter comme une vaac qui suit une loi normale dont l'écart type est de $6g$.

(a) Quelle est la probabilité qu'une boîte, choisie au hasard dans la production, ait un poids compris entre $334g$ et $346g$?

(b) Sur une production de 10000 boîtes, combien auront un poids inférieur à $330g$?

Mots-clés : Loi normale

<u>Solution</u> D'après l'énoncé, le poids s'interpréte comme une vaac X t.q. $X \sim \mathcal{N}(340, 6)$, où $m := E(X) = 340$ et $\sigma := \sigma(X) = 6$. En faisant le changement de variable $U = (X - m)/\sigma$, on obtient $U \sim \mathcal{N}(1, 0)$ (cf. Rem. 5.25 *(a)*).

(a) En utilisant En. 5.26 *(b)*, nous trouvons

$$P(334 \leq X \leq 346) = P(\tfrac{334-m}{\sigma} \leq U \leq \tfrac{346-m}{\sigma}) = P(-1 \leq U \leq 1) \overset{\text{En. 5.26 (b)}}{=} 2\Phi(1) - 1$$
$$\approx \boxed{68.3\%},$$

où la valeur de $\Phi(1)$ peut être trouvée dans une table ou être calculée par un logiciel.

(b) En utilisant En. 5.26 *(c)*, nous trouvons

$$P(X < 330) = P(U < -\tfrac{5}{3}) = \Phi(-\tfrac{5}{3}) \overset{\text{En. 5.26 (c)}}{=} 1 - \Phi(\tfrac{5}{3}) \approx \boxed{4.75\%}.$$

En assimilant probabilité et fréquence, on peut donc estimer à 475 le nombre de boîtes dont le poids est inférieur à $330g$ dans une production de 10000 boîtes.

□

Exercice 29. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de vad dont la loi est donnée par

$$X_n(\Omega) = \{-\sqrt{n}, \sqrt{n}\}, \qquad P(X_n = -\sqrt{n}) = P(X_n = \sqrt{n}) = \frac{1}{2}.$$

Peut-on appliquer la (faible) loi des grands nombres ?

Mots-clés : Loi des grands nombres

Solution Pour pouvoir appliquer En. 6.3, il faut que les vad aient la même espérance et la même variance (et qu'elles soient (mutuellement) indépendantes). Alors, on calcule

$$\begin{aligned} E(X_n) &= \frac{1}{2}(-\sqrt{n}) + \frac{1}{2}\sqrt{n} = 0, \\ V(X_n) &= \frac{1}{2}(-\sqrt{n} - 0)^2 + \frac{1}{2}(\sqrt{n} - 0)^2 = n, \end{aligned}$$

et on trouve qu'on ne peut pas appliquer En. 6.3 parce que les variances ne sont pas constantes en n. $\square$