UNIVERSITÉ DE TOULON
UFR Sciences et Techniques

Statistiques – TD 7

W. Aschbacher (*http://aschbacher.univ-tln.fr/*)

MB31 L2 Cours du 1er semestre 2013–2014 (6×2h CM et 8×1:30h TD)

Licence Biologie

Exercice 23. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ un couple de vaac dont la loi est déterminée, pour une constante $c \in \mathbb{R}$, par la densité

$$f(x,y) := \begin{cases} c(x+y), & (x,y) \in [0,1]^2, \\ 0, & \text{sinon}. \end{cases}$$

(a) Déterminer la fonction de répartition $F(x, y)$.

(b) Déterminer la valeur de c.

(c) Déterminer les lois marginales de X et Y.

Mots-clés : Loi du couple vaac, fonction de répartition, lois marginales

Solution

(a) D'après En. 4.12 *(c)*, la fonction de répartition s'exprime par la densité comme

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \mathrm{d}t \int_{-\infty}^{y} \mathrm{d}s\, f(t,s).$$

Nous allons discuter, l'un après l'autre, les cinq cas où (x, y) appartient à une des cinq régions de la figure suivante :

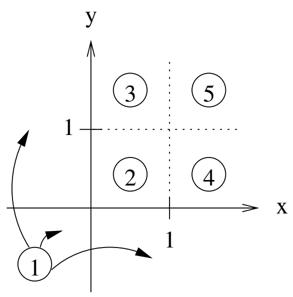

Figure Exr-23

Région 1 : $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus [0, \infty[^2$
Comme $f(x, y) = 0$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus [0, \infty[^2$, on a

$$F(x, y) = 0 \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus [0, \infty[^2.$$

Région 2 : $(x, y) \in [0, 1]^2$
Nous calculons

$$F(x, y) = \int_0^x \mathrm{d}t \int_0^y \mathrm{d}s\, f(t, s) = c \int_0^x \mathrm{d}t \int_0^y \mathrm{d}s\,(t + s) = \frac{c}{2}\,(x^2 y + x y^2). \qquad (1)$$

Région 3 : $(x, y) \in [0, 1] \times [1, \infty[$
Comme, d'après la définition de $f(x, y)$, nous avons que $F(x, y) = F(x, 1)$ si (x, y) est dans cette région, nous pouvons utiliser (1), d'où

$$F(x, y) = F(x, 1) = \frac{c}{2}\, x(x + 1) \quad \text{pour tout } (x, y) \in [0, 1] \times [1, \infty[.$$

Région 4 : $(x, y) \in [1, \infty[\times [0, 1]$
En utilisant (1), nous obtenons

$$F(x, y) = F(1, y) = \frac{c}{2}\, y(y + 1) \quad \text{pour tout } (x, y) \in [1, \infty[\times [0, 1].$$

Région 5 : $(x, y) \in [1, \infty[^2$
En utilisant (1), nous obtenons

$$F(x, y) = F(1, 1) = c \quad \text{pour tout } (x, y) \in [1, \infty[^2.$$

En résumé, nous arrivons à

$$\boxed{F(x, y) = c \cdot \begin{cases} 0, & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus [0, \infty[^2, \\ \frac{1}{2} x y (x + y), & (x, y) \in [0, 1]^2, \\ \frac{1}{2} x (x + 1), & (x, y) \in [0, 1] \times [1, \infty[, \\ \frac{1}{2} y (y + 1), & (x, y) \in [1, \infty[\times [0, 1], \\ 1, & (x, y) \in [1, \infty[^2. \end{cases}}$$

(b) D'après En. 4.12 *(b)*, il faut que $\lim_{x,y \to \infty} F(x, y) = 1$. Alors, on trouve $\boxed{c = 1}$.

(c) D'après En. 4.12 *(d)*, on a

$$F_X(x) = \lim_{y \to \infty} F_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} 0, & x \in]-\infty, 0], \\ \frac{1}{2}\, x(x + 1), & x \in [0, 1], \\ 1, & x \in [1, \infty[. \end{cases}$$

Dû à la symétrie de $F(x, y)$ en x et y, l'expression pour $F_Y(y)$ est obtenue de celle pour $F_X(x)$ en remplaçant x par y.

$\square$

Exercice 24. Une urne contient deux boules rouges, trois boules vertes et une boule noire. Soit X le nombre de boules rouges apparues au cours de n tirages avec remise.

(a) Quelle est la loi de X ?

(b) Donner l'espérance et la variance de X.

Mots-clés : Loi binomiale, espérance, variance

Solution

(a) Nous sommes dans la situation de Ex. 5.10 *(a)* où la caractéristique A est la couleur rouge de la boule.

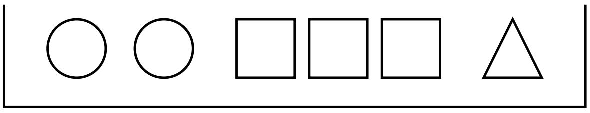

Figure Exr-24

La proportion p est égale à $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Alors, la vad X suit la loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{1}{3}$, c.-à-d., on a $\boxed{X \sim \mathcal{B}(n, \frac{1}{3})}$.

(b) D'après En. 5.9, nous avons

$$E(X) = \boxed{\frac{n}{3}},$$
$$V(X) = \frac{n}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \boxed{\frac{2n}{9}}.$$

□

Exercice 25. Soit $X \sim \mathcal{U}(a, b)$. Calculer :

(a) $F(x)$ (et tracer son graphe)

(b) $P(x_1 \leq X \leq x_2)$ si $[x_1, x_2] \subseteq [a, b]$

(c) $E(X)$

(d) $V(X)$

(e) $\sigma(X)$

Mots-clés : Loi uniforme, fonction de répartition, espérance, variance

Solution La vaac X suit une loi uniforme (de paramètres a et b), c.-à-d., pour tout $x \in \mathbb{R}$, sa densité a la forme (cf. Fig. Exr-25)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b], \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

(a) D'après Déf. 4.6, on a

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \mathrm{d}t\, f(t).$$

Pour $x < a$, on obtient donc $F(x) = 0$. Ensuite, pour $a \leq x \leq b$, on calcule

$$F(x) = \int_{a}^{x} \mathrm{d}t\, \frac{1}{b-a} = \frac{x-a}{b-a}.$$

Finalement, pour $x > b$, on trouve $F(x) = 1$. En résumé, nous arrivons à

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 1, & x > b. \end{cases}}$$

Le graphe de F a donc la forme suivante :

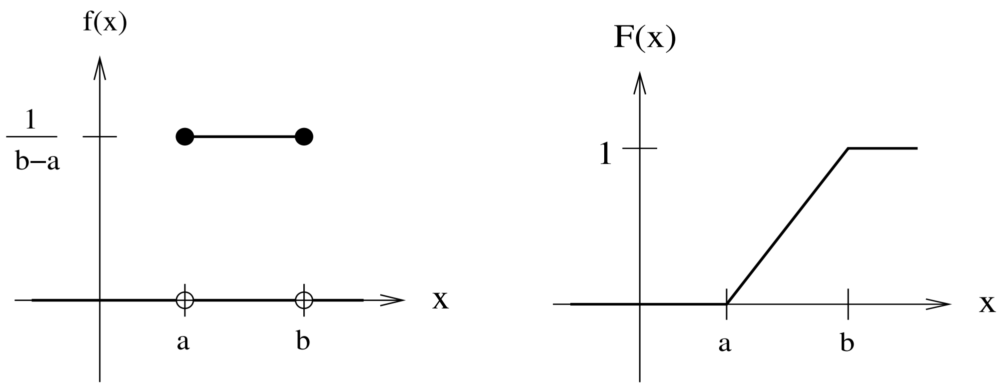

Figure Exr-25

(b) D'après En. 4.10 *(c)*, on a

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}t\, f(t) = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}t\, \frac{1}{b-a} = \boxed{\frac{x_2 - x_1}{b-a}},$$

c.-à-d., la probabilité qu'une vaac qui suit une loi uniforme tombe dans un intervalle donné est indépendante de la position de cet intervalle et ne dépend que de sa longueur (incluse dans $[a,b]$).

(c) D'après Déf. 4.13, nous pouvons écrire

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, x\, f(x) = \int_a^b \mathrm{d}x\, x\, \frac{1}{b-a} = \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{1}{2}\frac{b^2-a^2}{b-a} = \frac{1}{2}\frac{(b-a)(b+a)}{b-a}$$
$$= \boxed{\frac{b+a}{2}}.$$

(d) En utilisant la formule de König, le théorème de transfert (cf. En. 4.14) et (c), on calcule

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 \overset{\text{En. 4.14}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, x^2 f(x) - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 = \frac{1}{b-a}\int_a^b \mathrm{d}x\, x^2 - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2$$
$$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 = \frac{1}{b-a}\frac{(b-a)(b^2+ab+a^2)}{3} - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2$$
$$= \boxed{\frac{(b-a)^2}{12}}.$$

(e) Finalement, pour l'écart type, nous obtenons

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{6}(b-a)}.$$

$\square$