UNIVERSITÉ DE TOULON

UFR Sciences et Techniques

Statistiques – TD 6

W. Aschbacher (*http://aschbacher.univ-tln.fr/*)

MB31 L2 Cours du 1er semestre 2013–2014 (6×2h CM et 8×1:30h TD)

Licence Biologie

Exercice 19. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une var ayant la fonction de répartition $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) := \begin{cases} \frac{1}{3}\, \mathrm{e}^x, & x \leq 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Calculer $P(X = x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La var X est-elle continue ?

Mots-clés : Fonction de répartition

<u>Solution</u> La fonction F a la forme suivante :

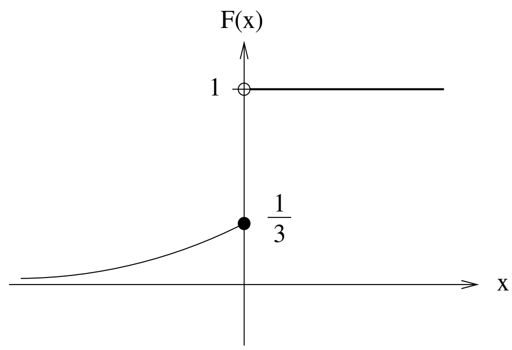

Figure Exr-19

Nous notons d'abord que F est une fonction de répartition (d'après Rem. 4.7 *(a)*) parce que

(a) F est croissant au sens large sur $\mathbb{R}$ (cf. En. 4.5 *(a)*),

(b) $F(x) \in [0, 1]$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ (cf. En. 4.5 *(b)*),

(c) F est continu à gauche (cf. En. 4.5 *(c)*).

D'après En. 4.5 *(d)*, nous pouvons écrire

$$\underbrace{\lim_{h\to 0^+} F(0+h)}_{=1} \overset{\text{En. 4.5 (d)}}{=} \underbrace{F(0)}_{=\frac{1}{3}} + P(X=0),$$

c.-à-d., nous obtenons un valeur différente de zéro,

$$P(X=0) = \boxed{\frac{2}{3}}.$$

Alors, F n'est pas continu à droite à l'origine et donc, X n'est pas une var continue (cf. Fig. Exr-19). Par ailleurs, l'origine est le seul point de probabilité non nulle. □

Exercice 20. Montrer :

(a) Soit X la vad qui décrit le jet d'un dé équilibré où on code 1 pour les résultats impairs et 0 pour les résultats pairs. Alors, $X \sim \mathcal{B}(1, \frac{1}{2})$.

(b) Soit X la vad qui décrit le lancer d'une pièce biaisée où on code 1 pour pile et 0 pour face. Alors, $X \sim \mathcal{B}(1, p)$ pour un $p \in]0, 1[\setminus \{\frac{1}{2}\}$.

Mots-clés : Espace probabilisé, image, image réciproque, loi de Bernoulli

Solution Ces deux exemples sont donnés dans Ex. 5.7.

(a) Comme dans Ex. 3.5, nous utilisons l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, où

$$\Omega := \{1, 2, \dots, 6\}, \quad \mathcal{A} := \mathcal{P}(\Omega), \quad P \text{ est l'équiprobabilité.}$$

En plus, la vad X est donnée par

$$X(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \text{ pair,} \\ 1, & \omega \text{ impair.} \end{cases}$$

Pour montrer que $X \sim \mathcal{B}(1, \frac{1}{2})$, c.-à-d., que X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{2}$, on doit calculer $P(X = x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. D'après Déf. 3.3, on a

$$P(X = x) = P_X(x) = P(X^{-1}(x)).$$

L'image réciproque de $x \in \mathbb{R}$ par $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est donnée par

$$X^{-1}(x) = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) = x\} = \begin{cases} \{2, 4, 6\}, & x = 0, \\ \{1, 3, 5\}, & x = 1, \\ \emptyset, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors, on trouve

$$P(X^{-1}(x)) = \begin{cases} P(\{2, 4, 6\}), & x = 0, \\ P(\{1, 3, 5\}), & x = 1, \\ P(\emptyset), & \text{sinon,} \end{cases} = \begin{cases} \frac{\operatorname{card}(\{2,4,6\})}{\operatorname{card}(\Omega)}, & x = 0, \\ \frac{\operatorname{card}(\{1,3,5\})}{\operatorname{card}(\Omega)}, & x = 1, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases} = \boxed{\begin{cases} \frac{1}{2}, & x = 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}}$$

(b) On retient l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, où

$$\Omega = \{\text{pile}, \text{face}\}, \quad \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega), \quad P(\{\text{pile}\}) = p, \quad P(\{\text{face}\}) = 1 - p.$$

En plus, la vad X est donnée par

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega = \text{pile}, \\ 0, & \omega = \text{face}. \end{cases}$$

Il en résulte que

$$X^{-1}(x) = \begin{cases} \{\text{pile}\}, & x = 1, \\ \{\text{face}\}, & x = 0, , \\ \emptyset, & \text{sinon}, \end{cases}$$

et donc, on peut écrire

$$P(X = x) = P(X^{-1}(x)) = \begin{cases} P(\{\text{pile}\}), & x = 1, \\ P(\{\text{face}\}), & x = 0, \\ 0, & \text{sinon}, \end{cases} = \boxed{\begin{cases} p, & x = 1, \\ 1 - p, & x = 0, \\ 0, & \text{sinon}. \end{cases}}$$

□

Exercice 21. La durée de vie d'une drosophile tirée au sort dans une population donnée est décrite par une vaac X ayant la propriété $X \sim \mathcal{E}(\theta)$ pour un $\theta > 0$.
Calculer l'espérance et l'écart type de la durée de vie.

Mots-clés : Loi exponentielle, espérance, variance, [intégration par parties]

Solution D'aprés Déf. 4.13 et Déf. 5.20, on peut écrire

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\; xf(x) = \theta \int_0^{\infty} \mathrm{d}x\; x\mathrm{e}^{-\theta x} = \theta\Bigg(\underbrace{\left[x\,\frac{\mathrm{e}^{-\theta x}}{-\theta} \right]_0^{\infty}}_{=0} + \frac{1}{\theta} \underbrace{\int_0^{\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-\theta x}}_{=1/\theta} \Bigg) = \boxed{\frac{1}{\theta}}.$$

Ensuite, d'après En. 4.14 et En. 4.15, on calcule

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, x^2 f(x) - \frac{1}{\theta^2} = \theta \int_0^{\infty} \mathrm{d}x\, x^2 \mathrm{e}^{-\theta x} - \frac{1}{\theta^2} \\ &= \theta\Bigg(\underbrace{\left[x^2\,\frac{\mathrm{e}^{-\theta x}}{-\theta} \right]_0^{\infty}}_{=0} + \frac{2}{\theta} \underbrace{\int_0^{\infty} \mathrm{d}x\, x\mathrm{e}^{-\theta x}}_{=E(X)/\theta = 1/\theta^2} \Bigg) - \frac{1}{\theta^2} = \frac{1}{\theta^2}, \\ \sigma(X) &= \sqrt{V(X)} = \boxed{\frac{1}{\theta}}. \end{aligned}$$

□

Exercice 22. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une var ayant la fonction de répartition F et soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Montrer :

(a) $P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$

Soit X est une vaac de densité f. Montrer :

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, f(x) = 1$

(c) $P(X \in [a, b]) = \int_a^b \mathrm{d}x\, f(x)$

Mots-clés : Fonction de répartition, propriétés densité

Solution

(a) Comme nous pouvons faire les décompositions

$$\begin{aligned}]-\infty, b\,[&=]-\infty, a[\ \cup\ [a, b\,[, \\ ]-\infty, a[\ \cap\ [a, b\,[&= \emptyset, \end{aligned}$$

et comme P_X est une probabilité (la démonstration de Exr. 12 reste inchangée si on passe des vad aux var), la propriété *(P3)* de Déf. 2.6 implique

$$\underbrace{P_X(]-\infty, b[)}_{=F_X(b)} = \underbrace{P_X(]-\infty, a[)}_{=F_X(a)} + \underbrace{P_X([a, b[)}_{=P(a \le X < b)}.$$

(b) En utilisant En. 4.5 *(b)*, on trouve

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, f(x) = \lim_{b\to\infty} \int_{-\infty}^{b} \mathrm{d}x\, f(x) = \lim_{b\to\infty} F(b) \overset{\text{En. 4.5 (b)}}{=} 1.$$

(c) Comme nous pouvons faire les décompositions

$$\begin{aligned} [a, b] &= [a, b[\ \cup\ \{b\}, \\ [a, b[\ \cap\ \{b\} &= \emptyset, \end{aligned}$$

et comme P_X est une probabilité, on a

$$P_X([a, b]) = P_X([a, b[) + P_X(\{b\}).$$

En plus, d'après (a), on peut écrire

$$P_X([a, b[) = F(b) - F(a) = \int_{-\infty}^{b} \mathrm{d}x\, f(x) - \int_{-\infty}^{a} \mathrm{d}x\, f(x) = \int_a^b \mathrm{d}x\, f(x).$$

Finalement, comme X est une vaac, d'après En. 4.5 *(d)*, on a $P_X(\{b\}) = 0$ et donc,

$$P(X \in [a, b]) = P_X([a, b]) = \int_a^b \mathrm{d}x\, f(x).$$

$\square$