UNIVERSITÉ DE TOULON
UFR Sciences et Techniques

# *Statistiques – TD 5*

---

W. Aschbacher (*http://aschbacher.univ-tln.fr/*)

**MB31 L2** Cours du 1er semestre 2013–2014 (6×2h CM et 8×1:30h TD)

*Licence Biologie*

---

**Exercice 15.** Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ un couple de vad. Montrer que les lois mariginales s'expriment par la loi du couple comme

$$p_{i.} = \sum_{j\in\mathbb{N}} p_{ij}, \qquad p_{.j} = \sum_{i\in\mathbb{N}} p_{ij}.$$

*Mots-clés :* Lois marginales

Solution Nous utilisons les notations de Déf. 3.11, c.-à-d., $X(\Omega) = \{x_0, x_1, \ldots\}$, $Y(\Omega) = \{y_0, y_1, \ldots\}$, et pour tout $i, j \in \mathbb{N}$, nous écrivons

$$p_{ij} = P_{(X,Y)}(\{x_i\} \times \{y_j\}), \qquad p_{i.} = P_X(x_i), \qquad p_{.j} = P_Y(y_j).$$

Comme, d'après Déf. 3.11, $P_{(X,Y)}(\{x_i\} \times \{y_j\}) = P((X,Y)^{-1}(\{x_i\} \times \{y_j\}))$, nous avons besoin de l'image réciproque de l'ensemble $\{x_i\} \times \{y_j\}$ par l'application $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ qui se calcule comme (cf. Rem. 3.12 *(a)*)

$$\begin{aligned}
(X,Y)^{-1}(\{x_i\} \times \{y_j\}) &= \{\omega \in \Omega \,|\, (X,Y)(\omega) = (X(\omega), Y(\omega)) \in \{x_i\} \times \{y_j\}\} \\
&= \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) = x_i,\ Y(\omega) = y_j\} \\
&= \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) = x_i\} \cap \{\omega \in \Omega \,|\, Y(\omega) = y_j\} \\
&= X^{-1}(x_i) \cap Y^{-1}(y_j).
\end{aligned}$$

Alors, pour un $i \in \mathbb{N}$ fixé, nous trouvons

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in\mathbb{N}} p_{ij} &= \sum_{j\in\mathbb{N}} P_{(X,Y)}(\{x_i\} \times \{y_j\}) \overset{\text{Déf. 3.11}}{=} \sum_{j\in\mathbb{N}} P((X,Y)^{-1}(\{x_i\} \times \{y_j\})) \\
&= \sum_{j\in\mathbb{N}} P(X^{-1}(x_i) \cap Y^{-1}(y_j)) \overset{\text{Déf. 2.6 } (P3)}{=} P\big(\textstyle\bigcup_{j\in\mathbb{N}}[X^{-1}(x_i) \cap Y^{-1}(y_j)]\big) \\
&= P\big(X^{-1}(x_i) \cap \big[\textstyle\bigcup_{j\in\mathbb{N}} Y^{-1}(y_j)\big]\big) = P\big(X^{-1}(x_i) \cap \underbrace{Y^{-1}\big(\textstyle\bigcup_{j\in\mathbb{N}}\{y_j\}\big)}_{=Y^{-1}(Y(\Omega))=\Omega}\big) \\
&= P(X^{-1}(x_i)) = P_X(x_i) = p_{i.},
\end{aligned}$$

où, dans la quatrième égalité, nous avons utilisé que $Y^{-1}(y_j) \cap Y^{-1}(y_k) = \emptyset$ pour tout $j \neq k$ ce qui nous permet d'appliquer *(P3)* de Déf. 2.6. L'expression pour $p_{.j}$ pour un $j \in \mathbb{N}$ fixé se calcule de manière analogue. $\square$

**Exercice 16.** Calculer l'espérance et l'écart type pour les vad suivantes :

(a) Variable certaine

(b) Variable indicatrice

*Mots-clés :* Calculs espérance et écart type

Solution

*(a)* La variable certaine agit comme $X(\omega) = c$ pour un $c \in \mathbb{R}$ donné et tout $\omega \in \Omega$. Alors, en utilisant Ex. 3.7 *(b)*, c.-à-d., $x_0 = c$ et $p_0 = 1$, et Déf. 3.16 et 3.21, on obtient

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i \in \mathbb{N}} p_i x_i = p_0 x_0 = \boxed{c}, \\ V(X) &= \sum_{i \in \mathbb{N}} p_i [x_i - E(X)]^2 = p_0 [x_0 - E(X)]^2 = 0, \\ \sigma(X) &= \sqrt{V(X)} = \boxed{0}. \end{aligned}$$

*(b)* En utilisant Ex. 3.7 *(c)*, c.-à-d., $x_0 = 0, x_1 = 1, p_0 = 1 - P(A_0), p_1 = P(A_0)$, et Déf. 3.16 et 3.21, on obtient

$$\begin{aligned} E(X) &= p_0 x_0 + p_1 x_1 = \boxed{P(A_0)}, \\ V(X) &= p_0 [x_0 - E(X)]^2 + p_1 [x_1 - E(X)]^2 = P(A_0)(1 - P(A_0)), \\ \sigma(X) &= \boxed{\sqrt{P(A_0)(1 - P(A_0))}}. \end{aligned}$$

$\square$

**Exercice 17.** Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une vad et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer :

$$E(g(X)) = \sum_{i \in \mathbb{N}} p_i \, g(x_i)$$

*Mots-clés :* Formule espérance, théorème de transfert

Solution Soit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ défini par $h(x, y) := g(x)$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$. Alors, en utilisant

En. 3.18, En. 3.13 et $p_{i.} = p_i$ (pour une seule vad), on obtient

$$E(g(X)) = E(h(X,Y)) \overset{\text{En. 3.18}}{=} \sum_{i,j\in\mathbb{N}} p_{ij}\, h(x_i, y_j) = \sum_{i,j\in\mathbb{N}} p_{ij}\, g(x_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \underbrace{\left(\sum_{j\in\mathbb{N}} p_{ij}\right)}_{\overset{\text{En. 3.13}}{=} p_{i.}} g(x_i)$$

$$= \sum_{i\in\mathbb{N}} p_{i.}\, g(x_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} p_i\, g(x_i).$$

□

**Exercice 18.** Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une vad et $(Y, Z) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ un couple de vad indépendantes. Montrer :

(a) $V(X + c) = V(X)$ pour tout $c \in \mathbb{R}$

(b) $V(cX) = c^2 V(X)$ pour tout $c \in \mathbb{R}$

(c) $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

(d) $E(YZ) = E(Y)E(Z)$

(e) $V(Y + Z) = V(Y) + V(Z)$

*Mots-clés :* Propriétés variance

Solution

(a) En utilisant la linéarité de l'espérance (cf. En. 3.19) et Exr. 16 (a), on a

$$\begin{aligned} V(X+c) &= E([X + c - E(X + c)]^2) = E([X + c - (E(X) + E(c))]^2) \\ &= E([X + c - (E(X) + c)]^2) = E([X - E(X)]^2) = V(X). \end{aligned}$$

(b) En utilisant la linéarité de l'espérance, on a

$$\begin{aligned} V(cX) &= E([cX - E(cX)]^2) = E([cX - cE(X)]^2) = E(c^2[X - E(X)]^2) \\ &= c^2 E([X - E(X)]^2) = c^2 V(X). \end{aligned}$$

(c) En utilisant la linéarité de l'espérance et Exr. 16 (a), on a

$$\begin{aligned} V(X) &= E([X - E(X)]^2) = E(X^2 - 2E(X)X + E(X)^2) \\ &= E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2. \end{aligned}$$

(d) Comme, d'après Déf. 3.14, on a $p_{ij} = p_{i.}p_{.j}$ pour tout $i, j \in \mathbb{N}$ si les vad sont indépendantes ($p_{ij}, p_{i.}, p_{.j}$ sont définis p.r. à $Y$ et $Z$), on obtient, en utilisant En. 3.18,

$$E(YZ) \overset{\text{En. 3.18}}{=} \sum_{i,j\in\mathbb{N}} p_{ij} y_i z_j = \sum_{i,j\in\mathbb{N}} p_{i.}p_{.j} y_i z_j = \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} p_{i.} y_i\right)\left(\sum_{j\in\mathbb{N}} p_{.j} z_j\right) = E(Y)E(Z).$$

(e) En utilisant (c), on peut écrire

$$\begin{aligned}
V(Y+Z) &\overset{\text{(c)}}{=} E([Y+Z]^2) - E(Y+Z)^2 \\
&= E(Y^2) + 2E(YZ) + E(Z^2) - [E(Y)+E(Z)]^2 \\
&= \underbrace{E(Y^2) - E(Y)^2}_{=V(Y)} + \underbrace{E(Z^2) - E(Z)^2}_{=V(Z)} + 2\underbrace{[E(YZ) - E(Y)E(Z)]}_{=C(Y,Z)}.
\end{aligned}$$

On utilisant (d), on a $C(Y,Z) = 0$ et donc, $V(Y+Z) = V(Y) + V(Z)$.

$\square$