UNIVERSITÉ DE TOULON
UFR Sciences et Techniques

Statistiques – TD 3

W. Aschbacher (*http://aschbacher.univ-tln.fr/*)

MB31 L2 Cours du 1er semestre 2013–2014 (6×2h CM et 8×1:30h TD)

Licence Biologie

Exercice 8. Un dé est lancé deux fois. Sachant que la somme des deux faces est égale à $x \in \{2, \ldots, 12\}$, quelle est la probabilité que la première face est égale à $k \in \{1, \ldots, 6\}$?

Mots-clés : Probabilité conditionnelle

Solution On retient le modèle probabiliste de Exr. 7 (b), c.-à-d.,

$$\Omega := \{(\alpha_1, \alpha_2) \,|\, \alpha_1, \alpha_2 \in \Lambda\}, \quad \mathcal{A} := \mathcal{P}(\Omega), \quad P \text{ l'équiprobabilité},$$

où $\Lambda := \{1, \ldots, 6\}$. L'événement *"la première face est égale à $k \in \Lambda$"* est décrit par

$$A := \{(k, \alpha) \,|\, \alpha \in \Lambda\}.$$

Ensuite, l'événement *"la somme est égale à $x \in \{2, \ldots, 12\}$"* est décrit par

$$B := \{(\alpha_1, \alpha_2) \,|\, \alpha_1, \alpha_2 \in \Lambda,\ \alpha_1 + \alpha_2 = x\}.$$

La probabilité recherchée est égale à la probabilité conditionelle de A sachant B. Alors, en utilisant la solution de Exr. 7 (b) pour $P(B)$, nous obtenons

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\mathrm{card}(A \cap B)}{\mathrm{card}(B)} = \frac{\mathrm{card}(\{(k, \alpha) \,|\, \alpha \in \Lambda,\ k + \alpha = x\})}{6 - |x - 7|}$$
$$= \boxed{\frac{1}{6 - |x - 7|} \quad \text{pour } \max\{x - 6, 1\} \leq k \leq \min\{x - 1, 6\}}.$$

$\square$

Exercice 9. On considère un tissu de cellules parmi lesquelles un certain nombre est infecté par un virus. Après traitement d'une partie des cellules, on remarque que sur les 70% de cellules non traitées, 25% sont atteintes du virus pendant que sur les 30% de cellules traitées, 12.5% sont encore atteintes du virus.
On prélève au hasard une cellule (et on admet que chaque cellule a la même probabilité d'être prélevée).

(a) Quelle est la probabilité que cette cellule soit infectée ?

(b) Sachant la cellule infectée, quelle est la probabilité qu'elle soit traitée ?

Mots-clés : Formule de la probabilité totale, formule de Bayes

Solution Comme modèle probabiliste $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, nous choisissons d'abord l'univers

$$\Omega := \{T, \bar{T}\} \times \{I, \bar{I}\},$$

où nous posons T : *"traité"*, $\bar{T}$: *"non traité"*, I : *"infecté"* et $\bar{I}$: *"non infecté"*. Ensuite, nous retenons la tribu triviale $\mathcal{A} := \mathcal{P}(\Omega)$. Les événements *"traité"* et *"infecté"*, notés A_T et A_I, sont décrits par

$$A_T := \{(T, I), (T, \bar{I})\}, \quad A_I := \{(T, I), (\bar{T}, I)\}.$$

En plus, les informations données sur la probabilité sont

$$P(A_T^c) := \frac{7}{10}, \quad P(A_I|A_T^c) := \frac{1}{4}, \quad P(A_I|A_T) := \frac{1}{8}.$$

(a) Comme A_T et A_T^c forment un système complet d'événements (cf. Déf. 2.15), nous pouvons appliquer la formule de la probabilité totale (cf. En. 2.16). On obtient alors

$$\begin{aligned} P(A_I) &\overset{\text{En. 2.16}}{=} P(A_T)P(A_I|A_T) + P(A_T^c)P(A_I|A_T^c) \\ &\overset{\text{En. 2.7 } (b)}{=} \left(1 - \frac{7}{10}\right) \cdot \frac{1}{8} + \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{4} = \boxed{\frac{17}{80}}. \end{aligned}$$

(b) Comme $P(A_T) > 0$ et $P(A_I) > 0$, nous pouvons appliquer la formule de Bayes (cf. En. 2.17) qui fournit

$$P(A_T|A_I) = \frac{P(A_T)P(A_I|A_T)}{P(A_I)} = \frac{\frac{3}{10} \cdot \frac{1}{8}}{\frac{17}{80}} = \boxed{\frac{3}{17}}.$$

Remarque : Noter que nous mettons l'accent sur le nouveau concept de ce cours qui est la modélisation sous-jacente donnée par le triplet d'un espace probabiliste. Si nous voulions nous restreindre aux calculs, on pourrait également utiliser des techniques comme les arbres probabilistes etc. que vous connaissez éventuellement déjà. □

Exercice 10. Un échantillon d'ADN de drosophiles (mouches du vinagre) est constitué d'un grand nombre de copies d'une séquence spécifique provenant respectivement à 30%, 30% et 40% de trois mouches différentes. Les proportions de copies défectueuses sont respectivement 4%, 3% et 2%.
Quelle est la probabilité qu'une copie choisie au hasard et dont on constate qu'elle est défectueuse provienne d'une mouche donnée ?

Mots-clés : Théorème de Bayes

Solution On peut faire la modélisation suivante. Nous choisissons

$$\Omega := \{c_1, c_2, c_3\} \times \{d, \bar{d}\},$$

où c_i pour $i \in \{1, 2, 3\}$ représente une copie provenant de mouche i, et d et $\bar{d}$ représentent les propriétés d'une copie d'être défectueuse ou pas. En plus, nous retenons $\mathcal{A} := \mathcal{P}(\Omega)$. Finalement, certaines valeurs de P sont spécifiées dans l'énoncé du problème. Les événements *"copies provenant de mouche i"* et *"copies défectueuses"*, respectivement notés M_i pour $i \in \{1, 2, 3\}$ et D, sont décrits par

$$M_i := \{(c_i, d), (c_i, \bar{d})\}, \quad D := \{(c_1, d), (c_2, d), (c_3, d)\}.$$

D'après les données du problème, on a donc

$$P(M_1) := \frac{3}{10}, \quad P(M_2) := \frac{3}{10}, \quad P(M_3) := \frac{4}{10}.$$

En plus, on peut écrire

$$P(D|M_1) := \frac{4}{100}, \quad P(D|M_2) := \frac{3}{100}, \quad P(D|M_3) := \frac{2}{100}.$$

Alors, d'après le théorème de Bayes (cf. En. 2.17) et utilisant que M_1, M_2 et M_3 constituent un système complet d'événements (cf. Déf. 2.15), on a

$$P(M_i|D) = \frac{P(M_i)P(D|M_i)}{\sum_{j=1}^{3} P(M_j)P(D|M_j)} \quad \text{pour } i \in \{1, 2, 3\},$$

c.-à-d., nous obtenons

$$P(M_1|D) = \frac{\frac{3}{10} \cdot \frac{4}{100}}{\frac{3}{10} \cdot \frac{4}{100} + \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{100} + \frac{4}{10} \cdot \frac{2}{100}} = \boxed{\frac{12}{29}}, \quad P(M_2|D) = \boxed{\frac{9}{29}}, \quad P(M_3|D) = \boxed{\frac{8}{29}}.$$

□