UFR Sciences et Techniques

Statistiques – TD 2

W. Aschbacher (*http://aschbacher.univ-tln.fr/*)

MB31 L2 Cours du 1er semestre 2013–2014 (6×2h CM et 8×1:30h TD)

Licence Biologie

Exercice 5. Montrer les propriétés *(a)* – *(d)* de En. 2.7.

Mots-clés : Propriétés de la probabilité

Solution

(a) Comme $\Omega = \Omega \cup \emptyset$ et $\Omega \cap \emptyset = \emptyset$, Déf. 2.5 *(P3)* implique que

$$P(\Omega) = P(\Omega) + P(\emptyset),$$

d'où $P(\emptyset) = 0$.

(b) Comme $\Omega = A \cup A^c$ et $A \cap A^c = \emptyset$, on a

$$P(\Omega) = P(A) + P(A^c).$$

En utilisant Déf. 2.5 *(P2)*, on obtient $P(A^c) = 1 - P(A)$.

(c) Comme $B = A \cup (B \setminus A)$ si $A \subseteq B$ et comme $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$, on a

$$P(B) = P(A) + \underbrace{P(B \setminus A)}_{\geq 0} \geq P(A).$$

Nous rappelons que, pour tout $A, B \in \mathcal{A}$, on a $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c \in \mathcal{A}$ et donc $B \setminus A = B \cap A^c \in \mathcal{A}$ (cf. Rap. 2.22).

(d) Comme on a les décompositions

$$B = (B \setminus A) \cup (A \cap B),$$
$$A \cup B = (B \setminus A) \cup A,$$

et comme les ensembles dans chacune de ces unions sont disjoints, on trouve, en utilisant Déf. 2.5 *(P3)*, que

$$P(B) = P(B \setminus A) + P(A \cap B),$$
$$P(A \cup B) = P(B \setminus A) + P(A).$$

En substituant la première équation dans la deuxième, on arrive à la conclusion (cf. la solution de Exr. 1).

□

Exercice 6. On considère un groupe de n étudiants.

(a) Quelle est la probabilité, notée p_n, pour que deux étudiants au moins aient la même date d'anniversaire (on suppose que toutes les années ont 365 jours) ?

(b) Trouver le plus petit n, noté n_0, t.q. $p_{n_0} \geq \frac{1}{2}$.

(c) Calculer p_{366}.

Mots-clés : Equiprobabilité

Solution Le modèle probabiliste $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ que nous utilisons est spécifié par

$$\Omega := \{1, \ldots, 365\}^n, \quad \mathcal{A} := \mathcal{P}(\Omega), \quad P \text{ l'équiprobabilité.}$$

En plus, nous utilisons la notation $\omega := (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \Omega$, où α_i pour $i \in \{1, \ldots, n\}$ est la date d'anniversaire de l'étudiant i.

(a) Nous commençons par définir l'événement suivant :

$$\begin{aligned} &\text{"Au moins deux étudiants ont la même date d'anniversaire."} \\ :\Longleftrightarrow \quad & A := \{\omega \in \Omega \,|\, \text{il existe } i, j \text{ avec } i \neq j \text{ t.q. } \alpha_i = \alpha_j\} \end{aligned}$$

Il en résulte que $A^c = \{\omega \in \Omega \,|\, \alpha_i \neq \alpha_j \text{ si } i \neq j\}$.

Pour calculer la probabilité pour que deux étudiants au moins aient la même date d'anniversaire, on peut donc écrire

$$\begin{aligned} p_n &= P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - P(\{\omega \in \Omega \,|\, \alpha_i \neq \alpha_j \text{ si } i \neq j\}) \\ &\overset{\text{En. 2.7}}{=} 1 - \frac{\operatorname{card}(\{\omega \in \Omega \,|\, \alpha_i \neq \alpha_j \text{ si } i \neq j\})}{\operatorname{card}(\Omega)} \\ &\overset{\text{Déf. 1.7}}{=} \begin{cases} 1 - \frac{A_{365}^n}{365^n}, & n \leq 365, \\ 1, & n > 365, \end{cases} \\ &\overset{\text{En. 1.8}}{=} \begin{cases} 1 - \frac{365!}{(365-n)!365^n}, & n \leq 365, \\ 1, & n > 365. \end{cases} \end{aligned}$$

(b) On obtient les valeurs numériques $p_{22} \simeq 0.48$ et $p_{23} \simeq 0.51$, et donc $n_0 = 23$ parce que p_n est une fonction croissante de n.

(c) On voit que $p_{366} = 1$.

Remarque :

Les naissances ne sont pas uniformément réparties sur l'année. Les valeurs statistiques réelles de p_n sont donc plus élevées. □

Exercice 7. Nous étudions les modèles probabilistes $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, P_i)$ avec $i \in \{1,2,3\}$ pour décrire l'expérience aléatoire *"la somme des faces d'un lancer de deux dés"*.

Soient $\mathcal{A}_i := \mathcal{P}(\Omega_i)$ et P_i l'équiprobabilité pour tout $i \in \{1,2,3\}$. En plus, soit $\Lambda := \{1,\dots,6\}$ et $a \in \{7,12\}$.

(a) Calculer $P_1(\{\alpha_1+\alpha_2 \in \Omega_1 \,|\, \alpha_1+\alpha_2 = a\})$ dans le modèle où

$$\Omega_1 := \{\alpha_1+\alpha_2 \,|\, \alpha_1, \alpha_2 \in \Lambda\}.$$

(b) Calculer $P_2(\{(\alpha_1,\alpha_2) \in \Omega_2 \,|\, \alpha_1+\alpha_2 = a\})$ dans le modèle où

$$\Omega_2 := \{(\alpha_1,\alpha_2) \,|\, \alpha_1, \alpha_2 \in \Lambda\}.$$

(c) Calculer $P_3(\{\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle \in \Omega_3 \,|\, \alpha_1+\alpha_2 = a\})$ dans le modèle où

$$\Omega_3 := \{\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle \,|\, \alpha_1, \alpha_2 \in \Lambda\}.$$

(d) Lequel de ces modèles est le mieux adapté pour décrire l'expérience ?

Mots-clés : Choix de modélisation

Solution

(a) D'abord, on a $\mathrm{card}(\Omega_1) = 11$. Alors, en utilsant la notation $P_1(x) := P_1(\{\alpha_1+\alpha_2 \in \Omega_1 \,|\, \alpha_1+\alpha_2 = x\})$ pour tout $x \in \{2,\dots,12\}$, on obtient

$$\boxed{P_1(7) = P_1(12) = \frac{1}{11}.}$$

(b) En écrivant $P_2(x) := P_2(\{(\alpha_1,\alpha_2) \in \Omega_2 \,|\, \alpha_1+\alpha_2 = x\})$ pour tout $x \in \{2,\dots,12\}$, on a

$$P_2(x) = \frac{\mathrm{card}(\{(\alpha_1,\alpha_2) \in \Omega_2 \,|\, \alpha_1+\alpha_2 = x\})}{\mathrm{card}(\Omega_2)},$$

et, d'après la règle du produit (cf. En. 1.1 *(a)*), on a $\mathrm{card}(\Omega_2) = 36$. Pour déterminer le numérateur, nous utilisons la table suivante dont les entrées sont données par la somme des valeurs de la première ligne et de la première colonne :

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

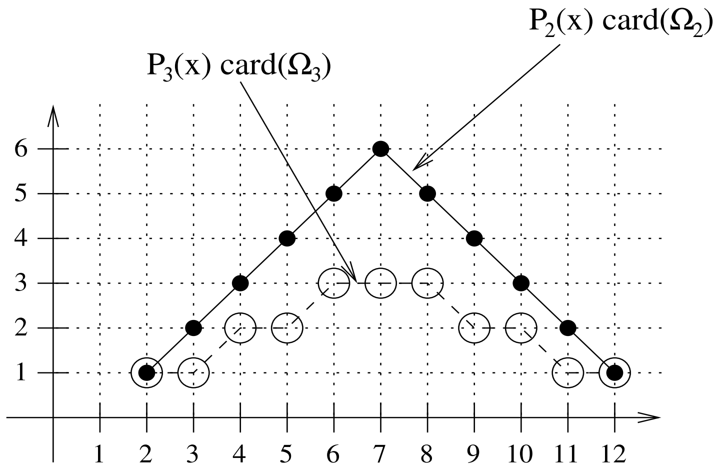

Figure Exr-7

Il en résulte (cf. Fig. Exr-7) que

$$\mathrm{card}(\{(\alpha_1,\alpha_2)\in\Omega_2\,|\,\alpha_1+\alpha_2=x\}) = 6-|x-7| \quad \text{pour tout } x\in\{2,\dots,12\}.$$

Alors, on obtient

$$\boxed{P_2(7)=\frac{1}{6},\quad P_2(12)=\frac{1}{36}.}$$

(c) En écrivant $P_3(x) := P_3(\{\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle\in\Omega_3\,|\,\alpha_1+\alpha_2=x\})$ pour tout $x\in\{2,\dots,12\}$, on a (cf. la table précédente et Fig. Exr-7)

$$\boxed{P_3(7)=\frac{3}{\mathrm{card}(\Omega_3)}=\frac{3}{21}=\frac{1}{7},\quad P_3(12)=\frac{1}{21}.}$$

(d) Le modèle $(\Omega_1,\mathcal{A}_1,P_1)$ n'est pas conforme à ce qu'on mesure dans l'expérience, où l'événement avec $a=7$ est beaucoup plus fréquent que l'événement avec $a=12$. En plus, on ne tient pas compte du fait que le résultat est la somme de deux dés.

Le modèle $(\Omega_2,\mathcal{A}_2,P_2)$ introduit un univers correspondant aux résultats de chacun des deux dés, et il suppose que les deux dés sont discernables. Les valeurs ainsi obtenues sont conformes aux valeurs mesurées dans l'expérience (noter qu'on pourrait donc également décrire cette expérience en définissant $P_2(x)$ de Figure Exr-7 sur l'espace probabilisable $(\Omega_1,\mathcal{A}_1)$ et que $P_2(x)$ sur $(\Omega_1,\mathcal{A}_1)$ n'est pas une équiprobabilité).

Contrairement au modèle $(\Omega_2,\mathcal{A}_2,P_2)$, le modèle $(\Omega_3,\mathcal{A}_3,P_3)$ ne distingue pas les deux dés. Comme les deux dés sont discernables (lancer deux dés l'un après l'autre ou lancer deux dés de couleurs différentes donne la même modélisation $(\Omega_2,\mathcal{A}_2,P_2)$ et le résultat ne change pas si on jette deux dés simultanément qu'ils soient de même couleur ou non), le modèle $(\Omega_2,\mathcal{A}_2,P_2)$ est le mieux adapté pour décrire cette expérience aléatoire.

□