UNIVERSITÉ DE TOULON

UFR Sciences et Techniques

Statistiques – TD 1

W. Aschbacher (*http://aschbacher.univ-tln.fr/*)

MB31 L2 Cours du 1er semestre 2013–2014 (6×2h CM et 8×1:30h TD)

Licence Biologie

Exercice 1. Montrer que la règle de la somme (cf. En. 1.1 *(b)*) implique la règle d'inclusion-exclusion (cf. En. 1.1 *(c)*).

Mots-clés : Principe de dénombrement

Solution On peut écrire (cf. Fig. Exr-1)

$$\begin{aligned} B &= (B \setminus A) \cup (A \cap B), \\ A \cup B &= (B \setminus A) \cup A, \end{aligned}$$

où $(B\setminus A)\cap(A\cap B) = \emptyset$ et $(B\setminus A)\cap A = \emptyset$, et nous rappelons que la différence (ensembliste) B moins A est donnée par $B \setminus A = \{b \in B \,|\, b \notin A\}$ (cf. Rap. 2.22).

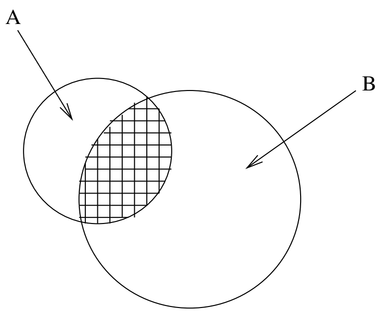

Figure Exr-1

Alors, d'après la règle de la somme, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{card}(B) &= \mathrm{card}(B \setminus A) + \mathrm{card}(A \cap B), \\ \mathrm{card}(A \cup B) &= \mathrm{card}(B \setminus A) + \mathrm{card}(A). \end{aligned}$$

En substituant $\mathrm{card}(B\setminus A) = \mathrm{card}(B) - \mathrm{card}(A\cap B)$ de la première équation dans la deuxième équation, on obtient la règle d'inclusion-exclusion,

$$\mathrm{card}(A \cup B) = \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B) - \mathrm{card}(A \cap B).$$

□

Exercice 2. Soient n points dans l'espace t.q. aucun quadruplet de points n'est coplanaire (c.-à-d., se trouve dans le même plan). Combien de plans sont définis par ces points ?

Mots-clés : Dénombrement, combinaison

Solution Comme dans la solution de Ex. 1.4, on va réduire le problème à un problème de dénombrement. Vu que tout triplet de points différents définit un plan dans l'espace, nous devons compter le nombre de sous-ensembles contenant trois points, c.-à-d., le nombre de combinaisons (cf. Déf. 1.10) de trois éléments dans l'ensemble de n points. D'après En. 1.11 (ou en procédant comme dans la solution de Ex. 1.4), le nombre de plans est égal à

$$C_n^3 = \binom{n}{3} = \frac{n!}{3!(n-3)!} = \frac{(n-2)(n-1)n}{6}.$$

A noter que le nombre de permutations de trois points est égal à $3! = 6$.

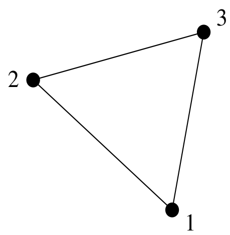

Figure Exr-2

□

Exercice 3. Montrer les propriétés suivantes pour le coéfficient binomial C_n^k pour $n, k \in \mathbb{N}$ et $k \leq n$:

(a) $C_n^0 = C_n^n = 1$

(b) $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$

(c) $C_n^k = C_n^{n-k}$

(d) $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$

Mots-clés : Factorielle

Solution

(a) et (b) : On note que les égalités entre les coéfficients dans (a) et (b) sont des cas particuliers de (c). En plus, on a

$$C_n^0 = \frac{n!}{0!n!} = 1,$$
$$C_n^1 = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n.$$

(c) On calcule

$$C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = C_n^k.$$

(d) On calcule

$$\begin{aligned} C_n^k + C_n^{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-(k+1))!(n-k)} + \frac{n!}{k!(k+1)(n-(k+1))!} \\ &= \frac{(k+1)n! + (n-k)n!}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!} \\ &= C_{n+1}^{k+1}. \end{aligned}$$

□

Exercice 4. Soit $\Omega = \{a, b, c\}$ et soient

$$\mathcal{A}_1 := \{\emptyset, \{b\}, \{a, c\}, \Omega\},$$
$$\mathcal{A}_2 := \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \Omega\}.$$

Montrer que $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont des tribus sur Ω. Est-ce que $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ et $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ sont des tribus ?

Mots-clés : Propriétés d'une tribu

Solution Si on note $A_1 := \{b\}$ et $A_2 := \{a\}$, on a

$$\mathcal{A}_i = \{\emptyset, A_i, A_i^c, \Omega\} \quad \text{pour } i = 1, 2.$$

D'après Ex. 2.4 *(c)*, $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont donc des tribus sur Ω. En plus,

$$\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \Omega\}$$

est la tribu grossière (cf. Ex. 2.4 *(b)*). Par contre,

$$\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \Omega\}$$

n'est pas une tribu parce que, bien que $\{a\} \in \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ et $\{b\} \in \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$, on a

$$\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\} \notin \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2,$$

et donc, la condition *(T3)* de Déf. 2.3 n'est pas satisfaite. □