UNIVERSITÉ DE TOULON

UFR Sciences et Techniques

Statistiques

W. Aschbacher **MB31 L2** Cours du 1er semestre 2013–2014 *Licence Biologie*

Examen du 16/12/2013 (Contrôle continu 2)
Durée : 120 minutes
Moyens autorisés : Un aide-mémoire constitué d'une seule feuille A4 recto-verso

---

Nota bene : Un point n'est accordé que si, pour chaque question, tous les items sont correctement cochés. Il n'y aura pas de demi-points ou de points négatifs.

Question 1. [1.0] Le code d'un coffre-fort est composé de cinq chiffres (entre 0 et 9). Combien y a-t-il de codes qui forment une suite de chiffres croissante ?

☐ A_{10}^5 ☒ $\frac{1}{5!}A_{10}^5$ ☐ $5!C_{10}^5$

Solution

Cf. Ex. 1.6 et En. 1.8 ☐

Question 2. [1.0] Lesquelles des familles suivantes sont des tribus sur $\Omega = \{1,2,3\}$?

☒ $\{\emptyset, \{1,2\}, \{3\}, \Omega\}$ ☒ $\{\emptyset, \{1\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$ ☐ $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \Omega\}$

Solution

☒ Cf. Ex. 2.5 *(c)* : On a $\{1,2\}^c = \{3\}$.

☒ Cf. Ex. 2.5 *(c)* : On a $\{1\}^c = \{2,3\}$.

☐ Cf. Déf. 2.3 *(T3)* : L'union $\{1\} \cup \{2\} = \{1,2\}$ n'est pas contenue dans l'ensemble en question.

☐

Question 3. [1.0] Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire discrète. Lesquels des énoncés suivants sont justes ?

☐ $P(X > 0) = P_X(\{x \in \Omega \,|\, x > 0\})$ ☒ $P_X(X(\Omega)) = 1$ ☐ $X \sim \mathcal{B}(1, \frac{1}{2})$

Solution

☐ Cf. Déf. 3.3

☒ D'après Déf. 3.3 et *(P2)* de Déf. 2.6, on a $P_X(X(\Omega)) = P(X^{-1}(X(\Omega))) = P(\Omega) = 1$.

☐ En général, X ne suit pas une loi de Bernoulli.

☐

Question 4. [1.0] Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ un couple de variables aléatoires discrètes. Lesquels des énoncés suivants sont justes ?

☐ $E(XY) = E(X)E(Y)$ ☒ $E(X+Y) = E(X)+E(Y)$ ☐ $V(X+Y) = V(X)+V(Y)$

Solution

☐ En général, X et Y ne sont pas indépendants (cf. En. 3.23 *(f)*).

☒ Cf. En. 3.19

☐ En général, X et Y ne sont pas indépendants (cf. En. 3.23 *(g)*).

☐

Question 5. [1.0] Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire absolument continue de densité f. Lesquels des énoncés suivants sont justes ?

☒ $F(0) = \int_{-\infty}^{0} \mathrm{d}x\, f(x)$ ☐ $E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, x f(x^2)$ ☒ $P(X \in [0,1]) = \int_0^1 \mathrm{d}x\, f(x)$

Solution

☒ Cf. Déf. 4.6

☐ Cf. En. 4.14 : On a $E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, x^2 f(x)$.

☒ Cf. En. 4.10 *(c)*

☐

Question 6. Un échantillon d'ADN de drosophiles est constitué d'un grand nombre de copies d'une séquence spécifique provenant respectivement à 20%, 40% et 40% de trois mouches différentes. Les proportions de copies défectueuses sont respectivement 5%, 4% et 2%.
On choisit au hasard une copie dans l'échantillon et on détermine de quelle mouche elle provient (noté i avec $i \in \{1,2,3\}$) et si elle est défectueuse ou intacte (noté D ou I).

(a) [1.0] Quel est l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$ qui modélise cette expérience ?
- ☒ $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $\Omega = \{1,2,3\} \times \{\text{D}, \text{I}\}$
- ☐ $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $\Omega = \{1,2,3,\text{D}, \text{I}\}$
- ☐ $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $\Omega = \{(1,2,3), (\text{D}, \text{I})\}$

(b) [1.0] Dans le modèle choisi, quels ensembles $A_i, B \in \mathcal{A}$ décrivent respectivement les événements *"La copie provient de la i-ième mouche."* et *"La copie est défectueuse."* ?
- ☐ $A_i = \{i\}$ et $B = \{\text{D}\}$
- ☒ $A_i = \{(i,\text{D}), (i,\text{I})\}$ et $B = \{(1,\text{D}), (2,\text{D}), (3,\text{D})\}$
- ☐ $A_i = \{(i,\text{D},\text{I})\}$ et $B = \{(1,2,3,\text{D})\}$

(c) [1.0] Quelle est la probabilité que la copie provient de la i-ième mouche ($i \in \{1,2,3\}$) ?

☒ $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}$ ☐ $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ ☐ $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$

Question 6. (Suite)

(d) [1.0] Quelle est la probabilité que la copie est défectueuse sachant quelle provient de la i-ième mouche ?

☐ $\frac{1}{25}, \frac{1}{25}, \frac{1}{50}$ ☐ $\frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \frac{1}{40}$ ☒ $\frac{1}{20}, \frac{1}{25}, \frac{1}{50}$

(e) [1.0] Quelle est la probabilité que la copie provient de la i-ième mouche sachant qu'elle est défectueuse ?

☐ $\frac{7}{17}, \frac{6}{17}, \frac{3}{17}$ ☐ $\frac{6}{17}, \frac{8}{17}, \frac{5}{17}$ ☒ $\frac{5}{17}, \frac{8}{17}, \frac{4}{17}$

Solution (Cf. Exr. 10)

(a) L'expérience aléatoire consiste en deux parties ce qui est décrit par le produit cartésien et non pas par les autres choix.

(b) Clair

(c) Ces probabilités sont données dans le texte : 20%, 40% et 40%.

(d) Ces probabilités conditionnelles sont données dans le texte : 5%, 4% et 2%.

(e) Comme, d'après (b) et (c), A_1, A_2 et A_3 constituent un système complet d'événements (cf. Déf. 2.15), le théorème de Bayes (cf. En. 2.17) fournit

$$\begin{aligned} P(A_i|B) &= \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3)} \\ &= \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\frac{2}{10}\frac{5}{100} + \frac{4}{10}\frac{4}{100} + \frac{4}{10}\frac{2}{100}} = \frac{1000}{34} P(A_i)P(B|A_i). \end{aligned}$$

Alors, nous obtenons

$$P(A_1|B) = \frac{10}{34}, \quad P(A_2|B) = \frac{16}{34}, \quad P(A_3|B) = \frac{8}{34}.$$

☐

Question 7. Dans l'expérience aléatoire qui consiste à lancer un dé équilibré à six faces, modélisée par l'espace probabilisé $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et l'équiprobabilité P, la variable aléatoire discrète X fournit la valeur 1 si le nombre obtenu est pair et 0 sinon.

(a) [1.0] Quel est l'univers image $X(\Omega)$?

☒ $\{0, 1\}$ ☐ $\{1, \ldots, 6\}$ ☐ $\{2, 4, 6\}$

(b) [1.0] Quel est la tribu image de $\mathcal{A}_X$?

☒ $\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$ ☐ $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \ldots, \{6\}, \Omega\}$ ☐ $\{\emptyset, \{2, 4, 6\}, \Omega\}$

(c) [1.0] Quelles sont les probabilités de la loi de X ?

☐ $\frac{1}{6}, \ldots, \frac{1}{6}$ ☒ $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ ☐ $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$

(d) [1.0] Quelle loi suit la variable X ?

☐ Loi de Dirac ☒ Loi de Bernoulli ☐ Loi de Poisson

Solution

(a) Cf. Ex. 3.5 : $X(\Omega)$ contient les valeurs que prend la variable aléatoire, c.-à-d., 0 et 1.

(b) Cf. Ex. 3.5

(c) Cf. Ex. 3.5 et Ex. 3.7 *(a)*

(d) Cf. Ex. 5.7 *(a)*

$\square$

Question 8. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire absolument continue dont la densité f est donnée, pour un $a \in \mathbb{R}$, par

$$f(x) = \begin{cases} 2a(1-x), & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

(a) [1.0] Quelle est la valeur de a ?

☐ $\frac{1}{2}$ ☒ 1 ☐ 2

(b) [1.0] Quelle est la fonction de répartition $F(x)$ de X pour $0 \leq x \leq 1$?

☒ $x(2-x)$ ☐ $\frac{1}{2}x(2-x)$ ☐ $2x(1-x)$

(c) [1.0] Quelle est la valeur de $P(0 \leq X < 1)$?

☐ $\frac{1}{2}$ ☒ 1 ☐ 2

Solution

(a) D'après En. 4.10 *(b)*, nous avons

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, f(x) = 2a \int_0^1 \mathrm{d}x\, (1-x) = 2a \left[x - \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = a.$$

(b) Pour $x \in [0,1]$, nous calculons (cf. Déf. 4.6)

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \mathrm{d}t\, f(t) = 2 \int_0^x \mathrm{d}t\, (1-t) = 2 \left[t - \frac{1}{2}t^2\right]_0^x = x(2-x).$$

(c) En utilisant Rem. 4.7 *(d)* (ou Exr. 22 *(a)*), on obtient

$$P(0 \leq X < 1) = F(1) - F(0) = 1 - 0.$$

$\square$

Question 9. [3.0] Soit X une variable aléatoire absolument continue sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Montrer que la fonction de répartition F de X est croissante au sens large sur $\mathbb{R}$.

Solution Soit $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x \geq y$. Alors, comme la densité f de X est non négative (cf. En. 4.10 *(a)*), Déf. 4.6 nous fournit que

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \mathrm{d}t\, f(t) = \underbrace{\int_{-\infty}^{y} \mathrm{d}t\, f(t)}_{=F(y)} + \underbrace{\int_{y}^{x} \mathrm{d}t\, f(t)}_{\geq 0} \geq F(y),$$

c.-à-d., par défintion, F est croissant au sens large sur $\mathbb{R}$. $\square$