UNIVERSITÉ DE TOULON

UFR Sciences et Techniques

Statistiques

W. Aschbacher **MB31 L2** Cours du 1er semestre 2013–2014 *Licence Biologie*

Examen du 02/12/2013 (Contrôle continu 1)
Durée : 120 minutes
Moyens autorisés : Un aide-mémoire constitué d'une seule feuille A4 recto-verso

---

Nota bene : Un point n'est accordé que si, pour chaque question, tous les items sont correctement cochés. Il n'y aura pas de demi-points ou de points négatifs.

Question 1. [1.0] Soient n points dans le plan t.q. aucun triplet de points n'est colinéaire. Quel est le nombre de droites définies par ces points ?

☐ $2!A_n^2$ ☐ $n!C_n^2$ ☒ $\frac{1}{2!}A_n^2$

Solution

☐ Cf. Ex. 1.4 et En. 1.8

☐ Cf. Ex. 1.4 et En. 1.11

☒ Cf. Ex. 1.4 et En. 1.8 : On a $\frac{1}{2!}A_n^2 = n(n-1)/2$. ☐

Question 2. [1.0] Lesquelles des familles suivantes sont des tribus sur $\Omega = \{a, b, c\}$?

☒ $\{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \Omega\}$ ☐ $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \Omega\}$ ☐ $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \Omega\}$

Solution

☒ Cf. Ex. 2.5 *(c)* : On a $\{a\}^c = \{b, c\}$.

☐ Cf. Déf. 2.3 *(T3)* : L'union $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$ n'est pas contenue dans l'ensemble en question.

☐ Cf. Déf. 2.3 *(T3)* : Comme le cas précédent. ☐

Question 3. [1.0] Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et soient $A, B \in \mathcal{A}$ t.q. $A \cap B = \emptyset$. Lesquels des énoncés suivants sont justes ?

☐ $P : \Omega \to [0, 1]$ ☐ $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ ☒ $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Solution
☐ Cf. Déf. 2.6
☐ Cf. Déf. 2.19 : En général, A et B ne sont pas indépendants.
☒ Cf. En. 2.7 *(d)* : On a $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$. ☐

Question 4. [1.0] Soit X une variable aléatoire discrète sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Lesquels des énoncés suivants sont justes ?

☒ $X : \Omega \to \mathbb{R}$ ☐ $\mathrm{card}(X(\Omega))$ est fini. ☐ L'application $x \mapsto P(X < x)$ est continue.

Solution
☒ Cf. Déf. 3.1
☐ Cf. Déf. 3.1 *(VAD 1)* : En général, $X(\Omega)$ n'est pas fini mais seulement dénombrable.
☐ Cf. En. 3.9 : En général, la fonction de répartition $F(x) = P(X < x)$ est une fonction en escalier. ☐

Question 5. [1.0] Soit X une variable aléatoire discrète sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, F sa fonction de répartition et $x_0, x_1 \in X(\Omega)$. Lesquels des énoncés suivants sont justes ?

☐ F est continue. ☐ $F(x_0) > F(x_1)$ si $x_0 < x_1$ ☒ $F(x_1) - F(x_0) = P_X(x_0)$ si $x_0 < x_1$

Solution
☐ Cf. En. 3.9 : En général, F est une fonction en escalier.
☒ Cf. En. 3.9 : Pour $i = 0$ et $p_0 = P_X(x_0)$.
☐ Cf. En. 3.9 : On a $F(x_0) \leq F(x_1)$ si $x_0 < x_1$. ☐

Question 6. Lors du tirage aléatoire dans l'ensemble des familles à deux enfants, on note d'abord le sexe de l'aîné et ensuite le sexe du cadet des enfants (le sexe sera noté f et g).

(a) [1.0] Quel est l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui modélise cette expérience ?
- ☐ $\Omega = \{\{\mathsf{f},\mathsf{f}\}, \{\mathsf{f},\mathsf{g}\}, \{\mathsf{g},\mathsf{g}\}\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, P : équiprobabilité
- ☒ $\Omega = \{\mathsf{f},\mathsf{g}\}^2$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, P : équiprobabilité
- ☐ $\Omega = \{\mathsf{f},\mathsf{g}\}^2$, $\mathcal{A} = \{\emptyset, (\mathsf{f},\mathsf{g}), \Omega\}$, P : équiprobabilité

(b) [1.0] Dans le modèle choisi dans (a), quels ensembles $A, C \in \mathcal{A}$ décrivent respectivement les deux événements *"L'aîné est un garçon."* et *"Le cadet est un garçon."* ?
- ☐ $A = \{\{\mathsf{g},\mathsf{f}\}, \{\mathsf{g},\mathsf{g}\}\}$, $C = \{\{\mathsf{f},\mathsf{g}\}, \{\mathsf{g},\mathsf{g}\}\}$
- ☒ $A = \{(\mathsf{g},\mathsf{f}), (\mathsf{g},\mathsf{g})\}$, $C = \{(\mathsf{f},\mathsf{g}), (\mathsf{g},\mathsf{g})\}$
- ☐ $A = \{(\mathsf{g},\mathsf{f}), (\mathsf{g},\mathsf{g})\}$, $C = \{(\mathsf{f},\mathsf{g}), (\mathsf{g},\mathsf{f}), (\mathsf{g},\mathsf{g})\}$

Question 6. (Suite)

(c) [1.0] Quelle est la probabilité des événements A et C ?

☐ $\frac{3}{4}, \frac{1}{4}$ ☒ $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ ☐ $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}$

(d) [1.0] Quelle est la probabilité que les deux enfants sont des garçons sachant que l'aîné est un garçon ?

☒ $\frac{1}{2}$ ☐ $\frac{1}{3}$ ☐ $\frac{1}{4}$

(e) [1.0] Quelle est la probabilité que les deux enfants sont des garçons sachant qu'au moins l'un des enfants est un garçon ?

☐ $\frac{1}{2}$ ☒ $\frac{1}{3}$ ☐ $\frac{1}{4}$

Solution

(a) ☐ Ce choix ne distingue pas l'âge des enfants.
☒ Ce choix distingue l'âge des enfants. D'après le texte, la première entrée correspond au sexe de l'aîné des deux enfants.
☐ Cf. Déf. 2.3 *(T2)* : $\mathcal{A}$ n'est pas une tribu.

(b) Clair

(c) Nous pouvons calculer que

$$P(A) = \frac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)} = \frac{2}{4} = \boxed{\frac{1}{2}},$$

et de manière analogue pour $P(C) = \boxed{\frac{1}{2}}$.

(d) L'événement *"Les deux enfants sont des garçns."* est donné par $A \cap C$. Alors, en utilisant Déf. 2.11, nous devons calculer

$$P(A \cap C | A) = \frac{P((A \cap C) \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap C)}{P(A)} = \frac{\mathrm{card}(A \cap C)}{\mathrm{card}(A)} = \frac{\mathrm{card}(\{(\mathsf{g}, \mathsf{g})\})}{\mathrm{card}(\{(\mathsf{g}, \mathsf{f}), (\mathsf{g}, \mathsf{g})\})} = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

(e) L'événement *"Au moins l'un des enfants est un garçon."* est donné par $A \cup C$. Alors, en utilisant Déf. 2.11, nous devons calculer

$$P(A \cap C | A \cup C) = \frac{P((A \cap C) \cap (A \cup C))}{P(A \cup C)} = \frac{P(A \cap C)}{P(A \cup C)} = \frac{\mathrm{card}(A \cap C)}{\mathrm{card}(A \cup C)} = \boxed{\frac{1}{3}}.$$

□

Question 7. On lance deux fois une pièce de monnaie et on note p et f pile et face. En plus, soit X la variable aléatoire discrète qui compte le nombre de fois qu'on a obtenu pile. Pour modéliser cette expérience, nous choisissons $\Omega = \{\mathsf{p}, \mathsf{f}\}^2$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et P l'équiprobabilité.

(a) [1.0] Quel est l'univers image de X ?

☒ $\{0, 1, 2\}$ ☐ $\{1, 2, 3\}$ ☐ $\{1, 2\}$

(b) [1.0] Quelles sont les probabilités de la loi de X ?

☒ $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ ☐ $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}$ ☐ $\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}$

(c) [1.0] Quelle est l'espérance de X ?

☐ $\frac{1}{2}$ ☒ 1 ☐ $\frac{3}{2}$

(d) [1.0] Quel est l'écart type de X ?

☒ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ☐ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ☐ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Solution

(a) Comme $\Omega = \{(\mathsf{p}, \mathsf{p}), (\mathsf{p}, \mathsf{f}), (\mathsf{f}, \mathsf{p}), (\mathsf{f}, \mathsf{f})\}$, nous obtenons pour l'univers image

$$X(\Omega) = \{X(\omega) \,|\, \omega \in \Omega\} = \boxed{\{0, 1, 2\}}.$$

(b) Nous posons $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$. D'après Déf. 3.6, on a $p_i = P_X(x_i)$ pour $i = 0, 1, 2.$ Alors, on trouve

$$p_0 = P(X^{-1}(x_0)) = P(X^{-1}(0)) = P(\{(\mathsf{f}, \mathsf{f})\}) = \frac{\mathrm{card}(\{(\mathsf{f}, \mathsf{f})\})}{\mathrm{card}(\Omega)} = \boxed{\frac{1}{4}}.$$

De manière analogue, on obtient

$$p_1 = P(X^{-1}(x_1)) = P(X^{-1}(1)) = P(\{(\mathsf{p}, \mathsf{f}), (\mathsf{f}, \mathsf{p})\}) = \frac{\mathrm{card}(\{(\mathsf{p}, \mathsf{f}), (\mathsf{f}, \mathsf{p})\})}{\mathrm{card}(\Omega)} = \frac{2}{4} = \boxed{\frac{1}{2}},$$

$$p_2 = P(X^{-1}(x_2)) = P(X^{-1}(2)) = P(\{(\mathsf{p}, \mathsf{p})\}) = \frac{\mathrm{card}(\{(\mathsf{p}, \mathsf{p})\})}{\mathrm{card}(\Omega)} = \boxed{\frac{1}{4}}.$$

(c) En utilisant (a) et (b), nous pouvons calculer

$$E(X) = p_0 x_0 + p_1 x_1 + p_2 x_2 = \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 = \boxed{1}.$$

(d) Afin de pouvoir utiliser la formule de König (cf. En. 3.23 *(e)*), nous calculons

$$E(X^2) = p_0 x_0^2 + p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 = \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 4 = \frac{3}{2}.$$

Pour l'écart type, nous obtenons alors

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}, \quad \text{c.-à-d.,} \quad \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

☐

Question 8. Soit X une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et soit $\{(x_0, p_0), (x_1, p_1)\}$ la loi de X.

(a) [1.0] Que vaut $E(X^2)$?

☐ $p_0^2 x_0 + p_1^2 x_1$ ☒ $p_0 x_0^2 + p_1 x_1^2$ ☐ $p_0^2 x_0^2 + p_1^2 x_1^2$

(b) [1.0] Soient $x_0 = -1$ et $x_1 = 1$. Que valent p_0 et p_1 si $E(X) = 0$ et $E(X^2) = 1$?

☒ $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ ☐ $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ ☐ $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}$

(c) [1.0] Si la loi de X a les valeurs de (b), quelle est la variance de X ?

☐ $\frac{1}{2}$ ☒ 1 ☐ 2

Solution

(a) D'après le théorème de transfert (cf. En. 3.20), nous avons $E(X^2) = \boxed{p_0 x_0^2 + p_1 x_1^2}$.

(b) En utilisant $E(X) = p_0 x_0 + p_1 x_1 = 0$ et $E(X^2) = p_0 x_0^2 + p_1 x_1^2 = 1$, nous obtenons

$$E(X) = -p_0 + p_1 = 0, \qquad E(X^2) = p_0 + p_1 = 1,$$

d'où nous trouvons que $p_0 = p_1 = \boxed{\frac{1}{2}}$.

(c) En utilisant la formule de König (cf. En. 3.23 *(e)*) et les valeurs pour $E(X)$ et $E(X^2)$ données dans (b), nous avons directement $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \boxed{1}$.

☐

Question 9. [3.0] Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et soient $A, B \in \mathcal{A}$ deux événements indépendants (p.r. à P). Montrer que, si $A = B$, on a

$$P(A) \in \{0, 1\}.$$

Solution D'après Déf. 2.19, les événements $A, B \in \mathcal{A}$ sont idépendants p.r. à P si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Alors, si $A = B$, on obtient

$$\underbrace{P(A \cap A)}_{=P(A)} = P(A)P(A),$$

c.-à-d., on peut écrire $P(A)(P(A) - 1) = 0$. Cette équation a les deux solutions $P(A) = 0$ ou $P(A) = 1$. ☐