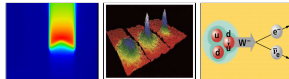


Projet de recherche

Walter H. Aschbacher (Ecole Polytechnique)

Mai 2011

- 3 directions de recherche principales:



Recherche: 3 directions principales

Ligne directrice commune: **Systemes ouverts et phénomènes collectifs**

1. Mécanique statistique quantique hors équilibre (direction dominante)

- **Phys:** NESS, transport, correlations, transitions de phase,...
- **Math:** Algèbres d'opérateurs, analyse fonctionnelle et harmonique
- &: V. Jakšić (Montréal), C.-A. Pillet (*Toulon*), H. Spohn (Munich),...

2. Equations de Schrödinger/Hartree non linéaires

- **Phys:** BEC, gravitation Newtonienne, vagues scélérates,...
- **Math:** EDP, calcul des variations, analyse numérique et programmation
- &: J. Fröhlich (Zurich), J. Giannoulis (Munich), M. Squassina (Vérone),...

3. Modèles mathématiques en théorie quantique des champs

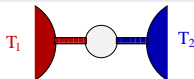
- **Phys:** Désintégration des bosons de jauge *faibles*, scattering leptonique,...
- **Math:** Analyse fonctionnelle et spectrale
- &: J.-M. Barbaroux (*Toulon*), J. Faupin (Bordeaux), J.-C. Guillot (Paris),...

1. Mécanique quantique hors équilibre: Motivations

Dans cette 1ère direction (principale), on est confronté au problème suivant:

Systèmes ouverts hors équilibre

- Pas de *principe général* disponible comme à l'équilibre (*KMS*): Contrôle détaillé de la dynamique en général impossible ("*non-elephant biology*")
- Restriction aux *Etats stationnaires hors équilibre (NESS)* [Ruelle 00]
- *Paradigme fondamental*: Echantillon confiné, proprement couplé à deux réservoirs en équilibres thermiques à des températures différentes



Premiers objectifs:

- Construction de l'unique NESS dans la limite des grands temps
Math: Approches *scattering algébrique* ou *liouvillienne*
- Preuve que ce NESS est thermodynamiquement non trivial, c.-à-d. que la **production d'entropie** est *strictement positive*

[Jakšić-Pillet 02] [A-Pillet 03] [Fröhlich *et al.* 03] [A *et al.* 06,07] [Jakšić *et al.* 07] [A 10,11]...

- Afin d'implémenter ce programme pour des systèmes *contrôlables*:
 Stratégies *bottom-up* (p.ex. intégrabilité) ou *top-down* (axiomatique)

1. Mécanique quantique hors équilibre: Travaux

Mes premiers travaux (et mes travaux les plus récents) se sont orientés vers:

NESS et propriétés

1 Construction de NESS [A-Pillet 03] [A et al. 06,07] [A 11,11]

- Effectuée via l'approche *scattering*: Modèle XY (1ère construction) et systèmes quasi-libres fermioniques généraux (*Triplet*: CAR, Bogoliubov, KMS)
- Physiquement pertinents: *P.ex.* PrCl₃, SrCuO₂,...
- Sous hypothèses générales:

Thm: Densité du NESS

Pour l'échantillon couplé à ses deux réservoirs, il existe un unique NESS dont la *densité* est constituée des composantes *scattering* et *localisation*

$$\rho = w^*(h_0, h_g)\rho_0 w(h_0, h_g) + \sum_{e \in \sigma_{pp}(h_g)} 1_e(h_g)\rho_0 1_e(h_g).$$

2 Production d'entropie

- Stricte positivité (XY: 1ère démonstration)
- Critère pour l'ordre le plus bas: Régime de van Hove [A-Spohn 06] [A 11]

1. Mécanique quantique hors équilibre: Travaux

③ Théorie de Landauer-Büttiker (LB) [A *et al.* 07]

- Via approche *scattering* (1ère démonstration):

Thm: Formule de LB généralisée

Le courant ne se réfère à la structure interne de l'échantillon que par le processus de scattering du problème à 1 corps,

$$\Phi = \int_{\sigma_{ac}(h_0)} de \operatorname{tr} (\omega_0(e)[q(e) - S^*(e)q(e)S(e)]).$$

- Théorie de réponse linéaire: Onsager, Green-Kubo

④ Corrélations hors équilibre [A-Barbaroux 06,07] [A 07,07,10,11]

- Via approche *Déterminant de Toeplitz*: Critères spectraux

Thm: Décroissance rapide

Si le système est invariant par translation (et modulaire et facteur),

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log C(n)}{n} \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}} \frac{dk}{2\pi} \log \det a(k).$$

- Analyse fine dans XY (aussi *non* invariant par translation): Left/right mover

1. Mécanique quantique hors équilibre: Programme (principal)

S'inscrit dans l'étude *rigoureuse* approfondie et systématique, motivée par:

- **Activité intense en physique théorique et expérimentale**
- **Recherche d'un *principe général* pour la description des NESS**

NESS

- Très peu de systèmes suffisamment contrôlables à notre disposition
- Pour développer l'intuition et la théorie: Accent sur la stratégie *bottom-up*

Modèles intégrables: Construction de NESS [A, en cours]

- Modèles intégrables dotés de *charges conservées*: A l'origine du "*hamiltonien effectif*" et influent sur les corrélations, le transport,...
- Charges également utilisées dans l'approche *Multiplicateurs de Lagrange (ML)* du NESS (état fondamental avec *courant*)
- D'autres approches: *Temps intermédiaires (TI)*, p.ex. dans les systèmes avec *Quench (QS)* (changement *soudain* de paramètres [Greiner et al. 02]...)

Approches du NESS: Clarification et unification

1. Mécanique quantique hors équilibre: Programme (principal)

Corrélations hors équilibre

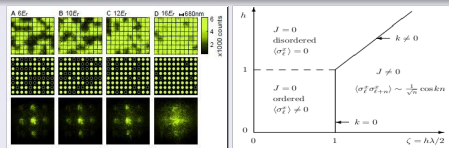
- Approche *Déterminant de Toeplitz*: Symboles hors équilibre génériquement *non commutatifs* et *singuliers* (asymptotique ouverte)
- Effets des *transitions de phase quantiques (TPQ)*: Universalité (QS),...

Asymptotique des corrélations: Rapport Toeplitz et TPQ

Transitions de phases hors équilibre (TPHE)

- TPQ et leurs *traces* à $T > 0$ et hors équilibre: Rôle important pour TPHE
- Quelques-uns de leurs effets: Singularités dans les courants, crossover des corrélations (*p.ex.* QS), dilations de TPQ (*p.ex.* ML [Antal *et al.* 97]),...

TPHE: Diagrammes de phase hors équilibre [A, *en cours*]



2. Schrödinger/Hartree non linéaires: Motivations

La 2ème direction de ma recherche:

Omniprésence: Régimes *effectifs*

$$i\partial_t\psi = (-\Delta + v + gV * |\psi|^2)\psi$$

- Mécanique quantique

BEC: Régimes champs moyen et Gross-Pitaevskii

[Hepp 74] [Ginibre-Vélo 79] [Spohn 80] [Lieb *et al.* 00,02] [Erdős *et al.* 07,08] [Pickl 09]...

Comment décrire BEC pour des interactions *attractives*?

- *Phys*: Nombre critique d'atomes (*p.ex.* $\sim 10^3$ pour ${}^7_3\text{Li}$ [Bradley *et al.* 95,97])
- *Math*: Non existence d'un minimisant global pour GP
- *Hartree*: Description adaptée aux situations de hautes densités subsistant au voisinage du collapse du condensat (existence garantie: Birman-Schwinger)

- Mécanique classique

Gravitation Newtonienne: Régime particules ponctuelles classiques

[Fröhlich *et al.* 02,04] [Fröhlich-Lenzmann 04] [Jonsson *et al.* 06]...

- Mécanique des fluides

Ondes de surface: Régime amplitudes faibles

[Craig *et al.* 01,02] [Lannes 05] [Hammack *et al.* 05] [Onorato *et al.* 06] [Shukla *et al.* 06]...

2. Schrödinger/Hartree non linéaires: Travaux

Equation de Hartree stationnaire et dynamique

1 Minimisant de la fonctionnelle de Hartree [A et al. 02]

- Couplage *fort*: Non unicité

Thm: Brisure spontanée de symétrie

Si V est attractif et v a une symétrie Euclidienne E , le minimisant de Hartree, dans le régime de couplage fort, satisfait

$$|\psi \circ E|^2 \neq |\psi|^2.$$

- Couplage faible: Unicité
- Couplage critique

2 Système de Hartree à plusieurs composantes [A-Squassina 09]

- Couplage *fort*: Séparation des phases (*p.ex.* condensats multiples BEC)

3 Equation de Hartree dynamique continue et discrétisée [A 02,09]

- Théorie complète en espace temps continu
- Contrôle analytique total de l'approximation discrétisée
- Logiciel (*haute performance*): Hartree stationnaire et dynamique

Intervention récente (12/2010): *Model equations in BEC*, Université de Kyoto

2. Schrödinger/Hartree non linéaires: Programme

Orientations principales

- 1 Dissipation par rayonnement [A, *en cours*]
 - *Retour à l'équilibre* (via *frottement quantique* intégré):
Mouvement d'une particule étendue dans un potentiel extérieur faible interagissant avec un *environnement dispersif*
 - Nature du rayonnement
 - Conditions aux limites transparentes
- 2 Scattering de solitons
 - Classification des structures émergentes (Limite Newtonienne: Galaxies)
- 3 Dérivation d'équations effectives [A-Giannoulis, *en cours*]
 - Vagues scélérates (à partir de l'équation d'Euler)

$$(i\partial_t + i\alpha \cdot \nabla + \nabla \cdot \mathcal{A}\nabla + \lambda|\psi|^2 + \mu|\varphi|^2)\psi = 0$$

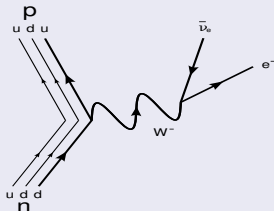
$$(i\partial_t + i\beta \cdot \nabla + \nabla \cdot \mathcal{B}\nabla + \lambda|\varphi|^2 + \mu|\psi|^2)\varphi = 0$$

3. Modèles mathématiques en QFT: Motivations

La 3ème direction de ma recherche:

Au-delà de la QED semi-relativiste

- QED semi-relativiste: Méthodes puissantes d'analyse spectrale
 [Barbaroux *et al.* 02] [Dimassi-Guillot 03] [Bach *et al.* 06] [Fröhlich *et al.* 08] [Chen *et al.* 09]...
- Analyse développable pour d'autres secteurs du *modèle standard*?
Interaction faible (IVB): *P.ex.* $W^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$ dans la désintégration β
 [Barbaroux-Guillot 09]



Nature du spectre

- **Phys:** Pas d'états liés pour les interactions faibles
- **Math:** Spectre *p.a.c.* au-dessus de l'état fondamental?

Facteurs de forme

- **Phys:** Localement borné
- **Math:** Analyse spectrale sous des hypothèses *physiquement réalistes*?

3. Modèles mathématiques en QFT: Travaux

Désintégration du boson de jauge W^\pm

Interaction (V-A) $\mathcal{H}_I = g \sum_l J_l^\alpha W_\alpha$ avec le courant leptonique

$$J_l^\alpha = \bar{\psi}_l \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_l}$$

Hypothèses *réalistes* (p.ex. sans régularisation infrarouge) [A et al. 11]:

- 1 Définition du hamiltonien dans l'espace de Fock et son caractère auto-adjoint (petit couplage g)
- 2 Existence d'un unique état fondamental à énergie E_0
- 3 Nature du spectre
 - Entre E_0 et le premier seuil $E_0 \leq 0 < m_e \ll m_W$:

Thm: Purement absolument continu

La théorie IVB satisfait une *inégalité de Mourre stricte* et une condition de *régularité locale* t.q.

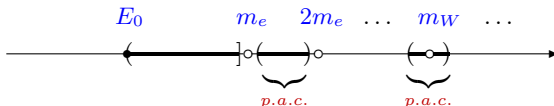
$$\text{ran } \mathbf{1}_{(E_0, E_0 + m_e - \varepsilon]}(H) \subset \mathcal{H}_{\text{ac}}.$$

Intervention récente (06/2010): *Matter and radiation*, Institut Schrödinger de Vienne

3. Modèles mathématiques en QFT: Programme

Orientations principales

1 Nature du spectre au-dessus de E_0 [A et al., en cours]



- Spectre strictement entre deux seuils
- Spectre *au voisinage des seuils* (pas de perturbation du commutateur libre): Feshbach-Schur/Théorie de Mourre généralisée

2 Scattering

- Etat final de la désintégration du boson W^\pm
- *Retour à l'équilibre* (état fondamental) à basse énergie
- Théorie du scattering stationnaire: *Principe d'absorption limite* [A et al. 11]

3 Processus variés

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu \quad Z^0 \rightarrow e^+ + e^- \quad Z^0 \rightarrow \nu_e + \bar{\nu}_e$$

- Propriétés *qualitativement différentes*: Gamme de problèmes intéressants pour la *théorie spectrale* associée (p.ex. particules massives)